



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Calculs d'ondes diffractées  
par des obstacles revêtus  
de couches minces  
de matériaux absorbants*

Anabelle ZEBIC

N° 2091

Novembre 1993

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,  
modélisation et  
logiciels numériques

*Rapport  
de recherche*

1993

# **Calculs d'ondes diffractées par des obstacles revêtus de couches minces de matériaux absorbants**

Anabelle Zebic  
INRIA, Projet MENUSIN, B.P. 105, Rocquencourt  
78153 Le Chesnay Cedex, France

## **Résumé :**

Nous nous intéressons ici à la diffraction d'une onde harmonique par un obstacle bidimensionnel, recouvert d'une fine couche d'un matériau composite.

Afin de pouvoir prendre en compte l'effet de ce matériau sans avoir à le représenter sur le maillage de l'approche numérique, nous donnons une méthode (tant pour le cas d'un revêtement homogène qu'hétérogène), pour établir une Condition aux Limites Equivalente (C.L.E.) sur une frontière artificielle placée autour de l'obstacle.

Les diverses expériences numériques effectuées démontrent l'efficacité des C.L.E. établies.

## **Mots-clés :**

Equations de Maxwell - Diffraction - Revêtement diélectrique - Condition aux Limites Equivalente (C.L.E.).

# **Scattered waves computations by obstacles coated by a thin layer of an absorbing material**

## **Abstract :**

We study herein the harmonic wave scattering by a bidimensional obstacle coated by a thin layer of a composite material.

In order to take into account the effect of the material without representing it on the mesh of the numerical approach, we give a method (for both cases of an homogeneous and heterogeneous coating), to set up an Equivalent Boundary Condition (E.B.C.) located on an artificial boundary around the obstacle.

Several numerical experiments prove the efficiency and the accuracy of the proposed E.B.C..

## **Key-words :**

Maxwell equations - Scattering - Dielectric coating - Equivalent Boundary Condition (E.B.C.).

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Définition du problème général</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Résolution numérique et résultats obtenus par une méthode d'éléments finis</b>	<b>13</b>
3.1	Formulation faible et discrétisation . . . . .	13
3.2	Résolution du système linéaire par la méthode GMRES . . . . .	15
3.3	Résultats numériques . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Condition aux Limites Equivalente (C.L.E.): étude du problème sur une cellule élémentaire</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Etude numérique de C.L.E. dans le cas d'un revêtement homogène.</b>	<b>27</b>
5.1	Formulation faible et discrétisation . . . . .	27
5.2	C.L.E. utilisées . . . . .	28
5.3	Résultats numériques . . . . .	31
5.3.1	Résultats sur la cellule élémentaire . . . . .	31
5.3.2	Résultats sur le domaine extérieur global . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Etude numérique d'une C.L.E. dans le cas d'un revêtement hétérogène</b>	<b>44</b>
6.1	Résultats sur la cellule élémentaire . . . . .	44
6.2	Résultats sur le domaine extérieur global . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

# 1 Introduction

L'étude de la diffraction d'ondes constitue un pôle d'intérêt certain dans le monde industriel. En effet, elle concerne de multiples domaines tels que la géophysique, l'océanographie ou encore la furtivité radar des avions (minimisation de leur réponse aux ondes incidentes).

Dans le présent travail, nous nous intéressons particulièrement à un problème statique de diffraction d'une onde harmonique, par un obstacle en deux dimensions revêtu d'une fine couche d'un matériau diélectrique. Ce dernier contient des hétérogénéités métalliques réparties de façon périodique. Ce matériau vise en effet à modéliser une peinture destinée à atténuer la réflexion d'une onde radar sur un avion.

Comme de nombreux phénomènes de diffraction, ce problème est régi par les équations de Maxwell en régime harmonique pour le cas bidimensionnel transverse magnétique (TM).

En vue de résoudre notre problème numériquement, nous limitons tout d'abord le domaine de calcul par une frontière artificielle circulaire autour de l'obstacle pour y imposer la condition "Dirichlet to Neumann" (DtN) (cf. [KG] et [Z]). Il s'agit d'une condition absorbante exacte.

L'essentiel de notre travail consiste alors en l'étude de Conditions aux Limites Equivalentes (C.L.E.) visant à simuler l'effet de la couche de matériau composite qui recouvre l'obstacle. En effet, de part la finesse de la couche et la petite taille des hétérogénéités, prendre en compte correctement le revêtement considéré est un problème délicat et coûteux. Ainsi, en utilisant une C.L.E. sur une frontière artificielle placée "au dessus de la couche", nous réduisons et simplifions notre domaine d'étude.

Pour obtenir la C.L.E., nous commençons par constater que, par une approximation de la solution grâce à la périodicité de la structure, nous pouvons ramener l'étude de l'effet de la couche sur une cellule élémentaire. Nous établissons alors une C.L.E. qui lie la solution et sa dérivée normale par un coefficient constant obtenu en résolvant un système linéaire sur la cellule. Dans le cas où le revêtement de l'obstacle est homogène, la solution du problème de cellule est alors analytique et détermine explicitement la C.L.E..

Afin de valider l'efficacité et la précision des C.L.E. établies, nous donnons finalement plusieurs résultats numériques aussi bien dans le cas d'un revêtement homogène que d'un revêtement hétérogène.

Nous avons organisé notre travail de la façon suivante :

Le chapitre 2 est constitué de courts rappels concernant l'établissement des équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques et définit ainsi le problème à résoudre.

Le chapitre 3 présente brièvement l'approximation par une méthode d'éléments finis ( $P^1$ ) et la méthode de résolution (GMRES (cf. [SS])) que nous avons choisies.

Le chapitre 4 expose la méthode utilisée pour établir une C.L.E. en ramenant notre étude sur une cellule élémentaire.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude numérique de C.L.E. dans le cas où le revêtement autour de l'obstacle est homogène. Dans ce chapitre, nous donnons explicitement quelques C.L.E. et en montrons le comportement à l'aide de plusieurs résultats numériques aussi bien sur la cellule élémentaire que sur le domaine global.

Le chapitre 6 présente quelques résultats numériques, dans le cas où le revêtement est hétérogène, visant à valider la méthode exposée au chapitre 4 pour établir une C.L.E..

Le chapitre 7 expose les conclusions de cette étude.

## 2 Définition du problème général

### Remarque préliminaire :

Dans tout ce qui suit, par abus de langage nous confondrons "bille" et "hétérogénéité". Tous deux désignent un borné de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , de frontière régulière non nécessairement circulaire ou sphérique. ■

Nous considérons un obstacle borné  $\Omega_o$  de  $\mathbb{R}^3$ , de bord  $\Gamma$  et parfaitement conducteur. Il est recouvert d'une fine couche d'épaisseur  $\delta$  d'un matériau isolant, diélectriquement et magnétiquement parfait, de constantes caractéristiques  $\varepsilon_2$  et  $\mu_2$ . Ce matériau n'est pas homogène, il inclut une structure périodique d'hétérogénéités  $B_i^\delta$ ,  $i = 1, N$ , de diamètre  $\rho\delta$  ( $\rho < 1$ ), parfaitement conductrices, telles que la période  $d\delta = \frac{1}{N}$  ( $d < 1$ ) soit petite par rapport au rayon de courbure de  $\Omega_o$  (cf. Fig. 2.1).

Nous notons  $\Omega_2$  le domaine qu'occupe ce matériau, privé des hétérogénéités. Par ailleurs, nous notons  $\Omega_1$  le domaine extérieur à  $\Omega_o \cup \Omega_2 \cup \bigcup_{i=1}^N B_i^\delta$ , et nous le supposons homogène, isolant, diélectriquement et magnétiquement parfait, de constantes  $\varepsilon_1$  et  $\mu_1$ . Nous notons  $\Gamma_\delta$  l'interface entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et  $\Omega$  le domaine extérieur global, c'est-à-dire  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ .

Nous nous intéressons ici à la diffraction par l'obstacle revêtu d'une onde électromagnétique connue, monochromatique, de fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (avec  $\omega > 0$  la pulsation) et de longueur d'onde  $\lambda$ . De plus, nous choisissons  $\lambda$  grand par rapport à la taille des hétérogénéités contenues dans le matériau.

Rappelons tout d'abord les équations de Maxwell. Dans  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ , elles s'écrivent :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E}_j + \frac{\partial \vec{B}_j}{\partial t} = 0, & (\text{loi de l'induction}) \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}_j - \frac{\partial \vec{D}_j}{\partial t} = \vec{J}_j, & (\text{loi d'Ampère}) \\ \text{div} \vec{D}_j = \rho_j, & (\text{loi de Gauss électrique}) \\ \text{div} \vec{B}_j = 0, & (\text{loi de Gauss magnétique}) \end{cases}$$

avec :

$\forall j = 1, 2 :$

- \*  $\vec{E}_j$  le champ électrique dans le milieu  $j$ ,
- \*  $\vec{B}_j$  l'induction magnétique dans le milieu  $j$ ,
- \*  $\vec{D}_j$  l'induction électrique dans le milieu  $j$ ,
- \*  $\vec{H}_j$  le champ magnétique dans le milieu  $j$ ,
- \*  $\vec{J}_j$  la densité de courant électrique du milieu  $j$ ,

\*  $\rho_j$  la densité de charge électrique du milieu  $j$ .

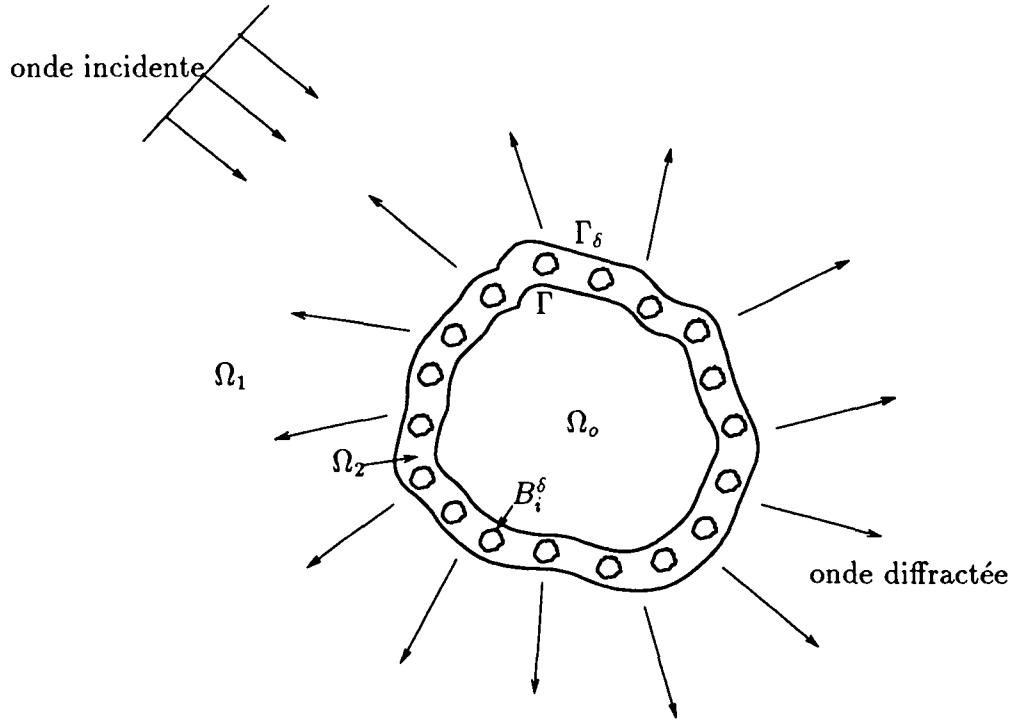


FIG. 2.1 - Diffraction par un obstacle recouvert d'un matériau hétérogène

L'équation dite de conservation ou de continuité relie les densités  $\vec{J}_j$  et  $\rho_j$ . Elle s'écrit :

$$(2.2) \quad \text{div} \vec{J}_j + \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = 0, \quad \forall j = 1, 2.$$

De plus, les milieux parfaits (qui sont linéaires, isotropes et homogènes) vérifient :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \vec{D}_j = \epsilon_j \vec{E}_j, \\ \vec{B}_j = \mu_j \vec{H}_j, \end{cases} \quad \forall j = 1, 2,$$

où  $\epsilon_j$  et  $\mu_j$  sont respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique qui caractérisent le milieu  $j$ .

Les milieux isotropes et homogènes vérifient également la loi d'Ohm :

$$(2.4) \quad \vec{J}_j = \sigma_j \vec{E}_j, \quad \forall j = 1, 2,$$

où  $\sigma_j$  est la conductivité du milieu  $j$ .

En régime harmonique, avec une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ , les équations (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) nous donnent finalement:

Dans  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E}_j - i\omega\mu_j \vec{H}_j = 0, \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}_j + i\omega\varepsilon_j \vec{E}_j = \vec{J}_j, \\ \text{div} \vec{J}_j - i\omega\rho_j = 0, \\ \vec{J}_j = \sigma_j \vec{E}_j. \end{cases}$$

Par ailleurs, nous savons (cf. [DL]) que les conditions de transmission sur l'interface  $\Sigma$  entre deux milieux différents s'écrivent :

$$(2.6) \quad \begin{cases} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \rho_\Sigma, \\ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = -J_\Sigma, \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0, \\ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = 0, \end{cases}$$

où  $\rho_\Sigma$  et  $J_\Sigma$  sont respectivement les densités de charge et de courant électrique concentrées sur l'interface  $\Sigma$ .

Dans notre cas, les milieux 1 et 2 occupant les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des isolants parfaits. Ainsi,  $\rho_{\Gamma_\delta} = J_{\Gamma_\delta} = 0$ . De plus, en reportant les équations de (2.3) dans (2.6)<sub>a</sub> et (2.6)<sub>c</sub>, nous obtenons les conditions de transmission sur l'interface  $\Gamma_\delta$ . Elles s'écrivent :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \varepsilon_1(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}) = \varepsilon_2(\vec{E}_2 \cdot \vec{n}) & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \mu_1(\vec{H}_1 \cdot \vec{n}) = \mu_2(\vec{H}_2 \cdot \vec{n}) & \text{sur } \Gamma_\delta, \end{cases}$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire à  $\Gamma_\delta$ , orientée de  $\Omega_2$  vers  $\Omega_1$ .

L'obstacle  $\Omega_o$  et les billes qui le recouvrent étant parfaitement conducteurs, nous avons en outre sur  $\Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta$  (cf. [DL]) :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \vec{E}_2 \wedge \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ \vec{H}_2 \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta. \end{cases}$$



Les champs  $\vec{E}_j$  et  $\vec{H}_j$ ,  $j = 1, 2$  sont donc solutions du problème aux limites suivant :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu_j}\vec{\text{rot}}\vec{E}_j\right) - \varepsilon_j\omega^2\vec{E}_j = 0 & \text{dans } \Omega_j, j = 1, 2, \\ \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\varepsilon_j}\vec{\text{rot}}\vec{H}_j\right) - \mu_j\omega^2\vec{H}_j = 0 & \text{dans } \Omega_j, j = 1, 2, \\ \vec{E}_2 \wedge \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ \vec{H}_2 \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ \varepsilon_1(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}) = \varepsilon_2(\vec{E}_2 \cdot \vec{n}) & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \mu_1(\vec{H}_1 \cdot \vec{n}) = \mu_2(\vec{H}_2 \cdot \vec{n}) & \text{sur } \Gamma_\delta. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, nous savons que pour déterminer de façon unique les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{H}_1$ , il est nécessaire d'adjoindre au système (2.9) une des conditions de radiation traduisant la propagation de l'énergie vers l'infini. L'une d'entre elles est la condition de Sommerfeld (cf. [S]).

Pour le champ  $\vec{E}_1$ , elle s'écrit :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial r} - ik_1 \vec{E}_1 \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial \vec{E}_1^{inc}}{\partial r} - ik_1 \vec{E}_1^{inc} \right).$$

Pour le champ  $\vec{H}_1$ , on a de même :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial r} - ik_1 \vec{H}_1 \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial \vec{H}_1^{inc}}{\partial r} - ik_1 \vec{H}_1^{inc} \right),$$

avec :

- \* Une limite uniforme par rapport à la direction  $\frac{\vec{r}}{r}$ ,  $r$  étant la distance euclidienne à l'origine,
- \*  $\vec{E}_i^{inc}$  et  $\vec{H}_i^{inc}$  les champs électrique et magnétique incidents,
- \*  $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$  le nombre d'onde dans le milieu 1.

Nous nous ramenons à l'étude d'un problème 2D en considérant  $\Omega_o$  comme un cylindre infini, et une onde incidente plane dont le vecteur d'onde est dans le plan orthogonal aux génératrices du cylindre.

Nous notons  $(\vec{e}^{x_1}, \vec{e}^{x_2}, \vec{e}^{x_3})$ , une base orthonormée cartésienne avec  $\vec{e}^{x_3}$  suivant l'axe du cylindre.

En reprenant le système (2.9) dans les deux cas suivants :

\* Cas transverse magnétique (TM) :

$$\vec{E}_j = (0, 0, E_{j_3}) \text{ et } \vec{H} = (H_{j_1}, H_{j_2}, 0), \quad j = 1, 2,$$

\* Cas transverse électrique (TE) :

$$\vec{E}_j = (E_{j1}, E_{j2}, 0) \text{ et } \vec{H} = (0, 0, H_{j3}), \quad j = 1, 2,$$

et en se plaçant dans un plan quelconque orthogonal à l'axe du cylindre, nous obtenons dans ce plan deux systèmes d'équations scalaires qui déterminent  $E_{j3}$  et  $H_{j3}$ ,  $\forall j = 1, 2$ . Ils s'écrivent :

Ondes (TM)

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_j} \vec{\nabla} E_{j3} \right) + \varepsilon_j \omega^2 E_{j3} = 0 & \text{dans } \Omega_j, \quad j = 1, 2, \\ E_{23} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ [E_3]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_3}{\partial n} \right]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial E_3}{\partial r} - ik_1 E_3 \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial E_3^{inc}}{\partial r} - ik_1 E_3^{inc} \right), \end{array} \right.$$

Ondes (TE)

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_j} \vec{\nabla} H_{j3} \right) + \mu_j \omega^2 H_{j3} = 0 & \text{dans } \Omega_j, \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial H_{23}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ [H_3]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_3}{\partial n} \right]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial H_3}{\partial r} - ik_1 H_3 \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial H_3^{inc}}{\partial r} - ik_1 H_3^{inc} \right), \end{array} \right.$$

avec :

- \*  $[u]_{\Gamma_\delta}$  désignant le saut de la fonction  $u$  sur  $\Gamma_\delta$  dans la direction normale,
- \*  $\varepsilon$  et  $\mu$  les fonctions définies dans  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  par :

$$\begin{aligned} * \varepsilon &= \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ \varepsilon_2 & \text{dans } \Omega_2, \end{cases} \\ * \mu &= \begin{cases} \mu_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ \mu_2 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque 1 :**

Les conditions de transmission sur  $\Gamma_\delta$  de (2.10) s'obtiennent avec (2.6)<sub>b</sub>, (2.6)<sub>d</sub> et (2.5)<sub>a</sub>. De même, celles de (2.11) s'obtiennent avec (2.6)<sub>b</sub>, (2.6)<sub>d</sub> et (2.5)<sub>b</sub>. ■

Nous nous intéressons ici à un problème bidimensionnel de diffraction d'une onde électromagnétique connue "venant de l'infini", sur un obstacle revêtu d'un matériau à structure périodique.

La description du problème est équivalente à celle donnée au début de cette section pour le cas tridimensionnel et nous conservons les mêmes notations.

Le système d'équations qui régit ce problème s'écrit :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que :} \\ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u \right) + \varepsilon \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ [u]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i k_1 u \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u^{inc}}{\partial r} - i k_1 u^{inc} \right), \end{array} \right.$$

avec  $u$  l'onde totale et  $u^{inc}$  l'onde incidente donnée.

Dans le but de résoudre le problème (2.12) de façon numérique, nous devons tout d'abord introduire une frontière artificielle  $\Sigma$  autour de l'obstacle et y imposer une condition aux limites qui minimise, voire annihile les réflexions artificielles.

De nombreuses études ont été menées à ce sujet (cf. par exemple [EM], [BT], [F], [KG] et [G]) et parmi les conditions aux limites totalement transparentes auxquelles certaines ont menées, nous avons retenu la condition "Dirichlet to Neumann" (DtN) (cf. [KG] et [Z]). C'est une condition exacte, qui est non locale mais très robuste et très efficace (cf. [KG]).

A noter que la condition DtN ne peut s'utiliser que lorsque  $\Sigma$  est un cercle. C'est pourquoi, nous choisissons  $\Sigma$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ ,  $O$  désignant un centre géométrique choisi dans  $\Omega_o$ .

Nous notons alors  $\Omega_1^T$  le domaine borné inférieurement par  $\Gamma_\delta$  et extérieurement par  $\Sigma$  (cf. Fig. 2.2).

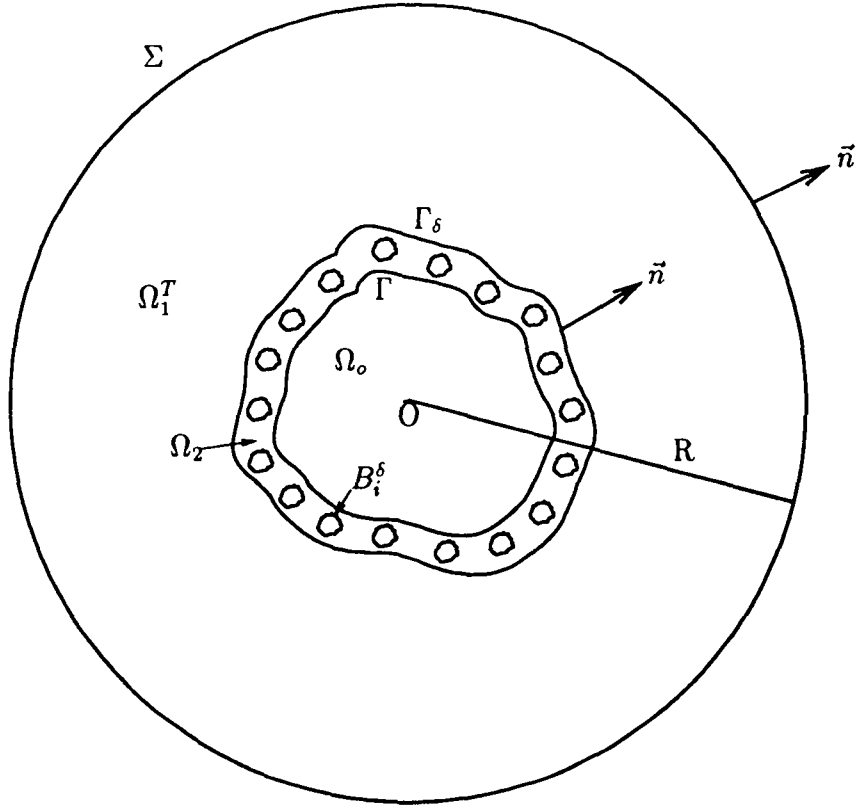


FIG. 2.2 - Troncature du domaine de calcul

La condition DtN s'écrit alors :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n} = -Mu + Mu^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma, \quad \text{avec} \\ Mu(R, \theta) = -\frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos[n(\theta - \theta')] u(R, \theta') d\theta', \\ \forall \theta \in [0, 2\pi], \end{array} \right.$$

où :

- \*  $H_n^{(1)}$  désigne la fonction de Hankel d'ordre  $n$  et du premier type,
- \* La notation  $\Sigma'$  signifie qu'un facteur  $\frac{1}{2}$  multiplie le terme correspondant à  $n = 0$ .

Finalement, en notant  $\Omega = \Omega_1^T \cup \Omega_2$  (et en oubliant la première définition de  $\Omega$ ), nous aboutissons au problème suivant, dans le domaine tronqué :

$$(2.14) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \text{ tel que :} & \\ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u \right) + \varepsilon \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ [u]_{\Gamma_\delta} = 0, & \\ \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma_\delta} = 0, & \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -Mu + Mu^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, nous savons que la solution du problème (2.12) s'exprime en fonction de celle du problème (2.14) et par le prolongement :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos[n(\theta - \theta')] u_d(R, \theta') d\theta' \\ \quad + u^{inc}(r, \theta), \\ \forall r \in [R, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi], \end{array} \right.$$

avec  $u_d$  (correspondant à l'onde diffractée), la solution du problème extérieur à  $\Sigma$  :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u_d \text{ tel que :} & \\ \Delta u_d + k_1^2 u_d = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega \cup \Omega_\phi \cup \bigcup_{i=1}^N B_i^\delta), \\ u_d = u_d(R, \theta) & \text{sur } \Sigma, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u_d}{\partial r} - ik_1 u_d \right) = 0. & \end{array} \right.$$

### 3 Résolution numérique et résultats obtenus par une méthode d'éléments finis

Dans ce chapitre, nous exposons brièvement la méthode d'éléments finis et la méthode de résolution utilisées pour résoudre le problème (2.14), dont nous donnons au préalable la formulation variationnelle. Par ailleurs, nous présentons des résultats obtenus dans le cas où le matériau qui recouvre l'obstacle est hétérogène puis homogène.

#### 3.1 Formulation faible et discrétisation

Afin de définir la formulation faible du problème (2.14), introduisons tout d'abord l'espace fonctionnel suivant :

$$V = \left\{ v \ ; \ v \in H^1(\Omega) \ ; \ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta \right\}.$$

Nous avons (cf. [AN]) :

**Proposition 1 :**

Toute solution  $u$  du problème (2.14) est solution du problème variationnel suivant :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \bar{v} - \varepsilon \omega^2 u \bar{v} \right) dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma} M u \bar{v} d\sigma \\ = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma} \left( M u^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \right) \bar{v} d\sigma \end{cases}, \quad \forall v \in V.$$

De plus, le problème (3.1) admet une solution unique. ■

De façon classique, on montre que la solution de (3.1) est solution de (2.14).

Pour discrétiser le problème (3.1), nous commençons par approcher  $\bar{\Omega}$  par un domaine polygonal  $\bar{\Omega}_h$  dont les sommets des frontières  $\Gamma_{,h}$ ,  $\bigcup_{i=1}^N \partial B_{i,h}^\delta$ ,  $\Gamma_{\delta,h}$  et  $\Sigma_{,h}$  sont des points respectifs de  $\Gamma$ ,  $\bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta$ ,  $\Gamma_\delta$  et  $\Sigma$ .

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\bar{\Omega}_h$  à l'aide de triangles  $k$  de diamètre  $h_k \leq h = \max_{k \in \mathcal{T}_h} h_k$  et  $\mathcal{P}_1$  l'espace des polynômes de deux variables de degré inférieur ou égal à un.

Nous voulons construire, à l'aide d'une méthode d'éléments finis  $P^1$  une solution approchée  $u_h$  définie dans  $\bar{\Omega}_h$ .

Introduisons tout d'abord  $V_h$ , le sous-espace de dimension finie de  $V$  défini par :

$$V_h = \left\{ v \ ; \ v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h) \ ; \ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{,h} \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_{i,h}^\delta \right. \\ \left. ; \ v|_k \in P^1, \forall k \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Nous remplaçons alors le problème (3.1) par le problème suivant :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega_h} \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} \bar{v}_h - \varepsilon \omega^2 u_h \bar{v}_h \right) dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma_{,h}} M u_h \bar{v}_h d\sigma \\ = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma_{,h}} \left( M u^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \right) \bar{v}_h d\sigma \end{cases}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

On note :

- \*  $N$  le nombre de noeuds de  $\mathcal{T}_h$ ,
- \*  $N_T$  le nombre de triangles de  $\mathcal{T}_h$ ,
- \*  $N_1$  le nombre de noeuds de  $\mathcal{T}_h$  n'appartenant pas à  $\Gamma_{,h} \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_{i,h}^\delta$ ,
- \*  $\eta$  l'ensemble des noeuds de  $\mathcal{T}_h$ ,
- \*  $\eta_1$  l'ensemble des noeuds n'appartenant pas à  $\Gamma_{,h} \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_{i,h}^\delta$ ,
- \*  $\eta_2$  l'ensemble des noeuds appartenant à  $\Sigma_{,h}$ ,
- \*  $\varphi_i$  la fonction de base associée au noeud  $i$  de  $\eta$ ,
- \*  $a_i$  le point physique occupé par le noeud  $i$ .

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} *u_h &= \sum_{i \in \eta_1} u_h(a_i) \varphi_i, \\ *v_h &= \sum_{i \in \eta_1} v_h(a_i) \varphi_i. \end{aligned}$$

En reportant  $u_h$  et  $v_h$  dans la formulation de (3.2), nous obtenons finalement un système linéaire dans  $\mathbb{C}^{N_1}$  :

$$(3.3) \quad Au = F,$$

où :

\*  $A$  est la matrice carrée, complexe, symétrique définie par :

$$A = B + C,$$

avec :

$$* B_{ij} = \int_{\Omega_h} \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_j - \varepsilon \omega^2 \varphi_i \varphi_j \right) dx, \quad i, j \in \eta_1,$$

$$* C_{ij} = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma, h} M_t \varphi_i \varphi_j d\sigma, \quad i, j \in \eta_2,$$

\*  $M_t$  l'opérateur DtN dans lequel on a tronqué la série à l'indice  $N_t$ ,

$$* u = (u_j(a_j))_{j \in \eta_1},$$

\*  $F = (F_{hi})_{i \in \eta_2}$  est défini par :

$$F_{hi} = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma, h} \left( M u^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \right) \varphi_i dx.$$

### Remarque 2 :

Le lecteur désirant connaître une méthode de calcul pour la matrice  $C$  peut se référer à [Z].

■

## 3.2 Résolution du système linéaire par la méthode GMRES

Par une méthode de prolongement classique, nous ramenons le système (3.3) à un système linéaire dans  $\mathbb{C}^N$  que nous notons aussi :

$$(3.4) \quad Au = F.$$

Nous savons que  $A$  est une matrice carrée complexe, creuse, symétrique, non hermitienne, de partie hermitienne non définie positive et à diagonale non dominante.

Pour résoudre le système (3.4), nous avons choisi d'utiliser la méthode GMRES (Generalized Minimal RESidual method) (cf. [SS]), qui est une méthode itérative de type gradient. En effet, cette méthode s'est toujours avérée très robuste pour résoudre les systèmes linéaires quelconques. De plus, la matrice  $A$  ne sert alors que pour calculer des produits matrice-vecteur, ce qui permet de simplifier son stockage et de traiter de grands systèmes.

Pour assurer la stabilité et accélérer la convergence de la méthode, il est important de bien préconditionner le système. De [Z] est ressorti que le plus efficace est de préconditionner (3.4) par la matrice  $A$  privée des conditions aux limites, et factorisée



par une méthode de CROUT incomplet. A noter que l'utilisation d'une factorisation incomplète nous permet de rester performant lors de la résolution de grands systèmes puisque le stockage de la matrice en mémoire centrale est minimisé.

### 3.3 Résultats numériques

Dans cette sous-section, nous donnons un exemple de résultats obtenus lorsque l'obstacle est recouvert d'une fine couche d'un matériau hétérogène puis homogène.

Pour cela, nous nous fixons le cas test suivant :

- \* L'obstacle est un disque de rayon  $R_o = 4,59.10^{-1}$  m,

- \* Le matériau diélectrique qui le recouvre est caractérisé par les permittivité diélectrique et perméabilité magnétique relatives :

$$\varepsilon_r = 1 \quad ; \quad \mu_r = 2,56.$$

Ainsi  $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_o = \varepsilon_o$  ;  $\mu_2 = \mu_r \mu_o = 2,56 \mu_o$ , avec  $\varepsilon_o$  et  $\mu_o$  les constantes caractéristiques du vide (dans le système U.S.I.) :

$$* \varepsilon_o = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} F/m,$$

$$* \mu_o = 4\pi 10^{-7} H/m,$$

- \* Le milieu extérieur a les caractéristiques du vide, c'est-à-dire  $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$  et  $\mu_1 = \mu_o$ ,

- \* L'épaisseur de la couche vaut  $\delta = 10^{-1}$  m,

- \* Les hétérogénéités (lorsqu'elles existent) sont des disques totalement réfléchissants de diamètre  $\rho\delta = 5.10^{-2}$  m et ont une répartition périodique de période  $d\delta = 10^{-1}$  m,

- \* L'onde incidente est plane, de longueur d'onde  $\lambda = 2$  m et se propage suivant l'axe  $\vec{OX}_2$  dans le sens  $x_2 > 0$  (cf. Fig. 3.1). Elle s'écrit :

$$u^{inc}(x) = e^{ik_1 x_2},$$

avec  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi,$

- \* La frontière artificielle est placée à une distance  $1,2\lambda$  de l'extérieur de la couche,

- \* Dans GMRES, la dimension de l'espace de Krylov (cf. [SS]) est fixée à 150

et la précision à  $10^{-6}$ ,

\* Dans le cas hétérogène, la triangulation comporte 15392 noeuds et 29312 triangles,

\* Dans le cas homogène, la triangulation comporte 16288 noeuds et 31680 triangles,

\* Pour les deux triangulations, on a  $\frac{\lambda}{h} \simeq 20$ .

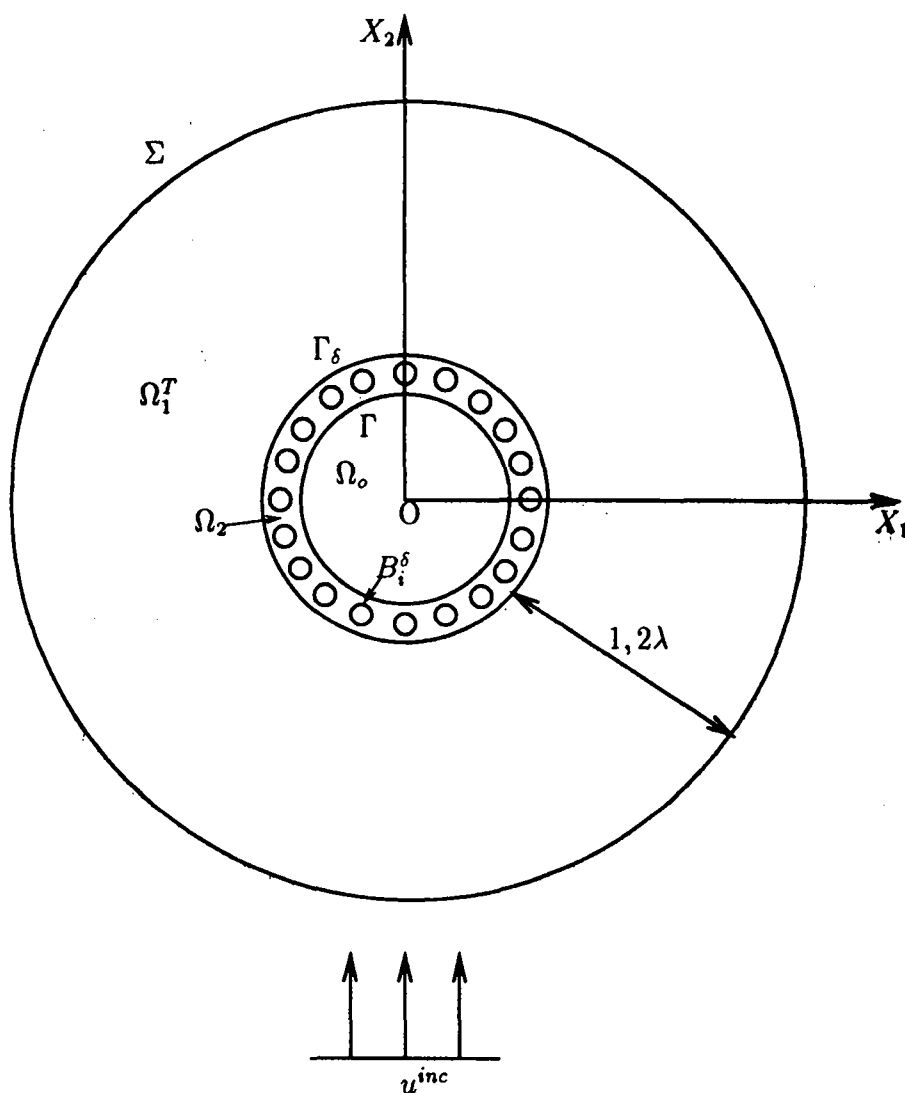


FIG. 3.1 - Cas de calcul

**Remarque 3 :**

(3a) Nous entendons par nombre d'itérations la somme des itérations effectuées dans la boucle interne de l'algorithme GMRES (cf. [SS]).

(3b) Le temps CPU est celui écoulé depuis la mise en route du programme. Nous l'indiquons en secondes.

(3c) Nous avons fixé à 20 l'indice de troncature de la série intervenant dans l'opérateur DtN.

(3d) Les tests ont été effectués sur le CRAY2. ■

\* La figure 3.2 présente un zoom du maillage utilisé dans le cas où le revêtement est hétérogène.

\* Le tableau 1 donne le nombre d'itérations dans GMRES et le temps CPU qui ont été nécessaires à l'obtention des résultats.

\* Les figures (3.3,3.4) et (3.5,3.6) visualisent la solution calculée lorsque la couche autour de l'obstacle est respectivement hétérogène et homogène,

**Remarque 4 :**

Chacune des solutions visualisées ici représente la partie réelle de l'onde diffractée  $u^d$  avec  $u = u^d + u^{inc}$ .

Cette remarque ainsi que la remarque 3 restent valables par la suite pour tous les résultats numériques présentés, mis à part ceux sur la "cellule élémentaire". ■

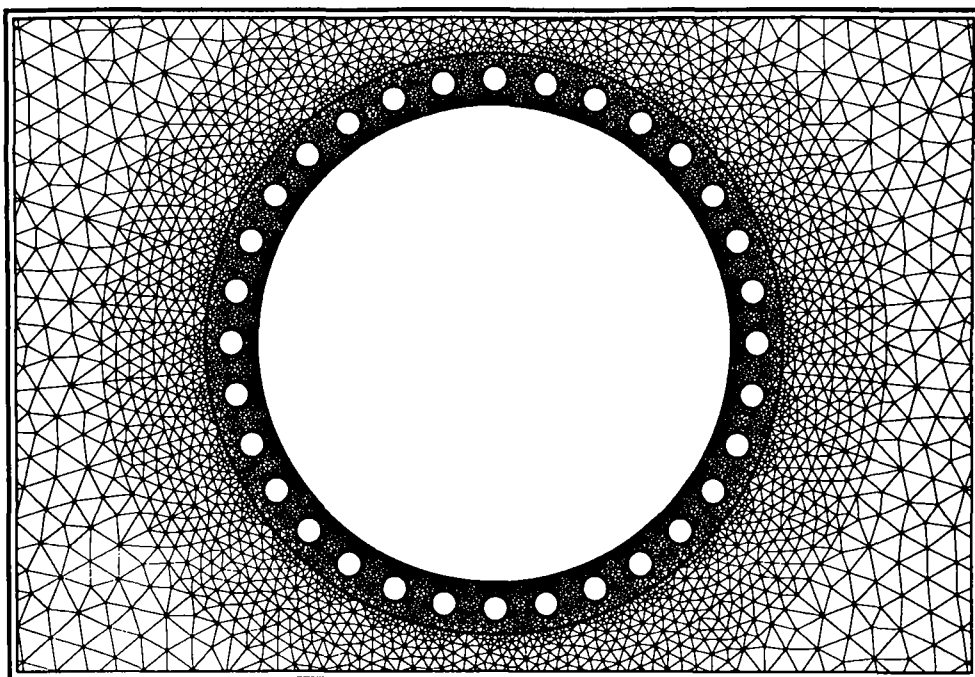


FIG. 3.2 - Zoom du maillage utilisé dans le cas hétérogène

	Itérations	CPU
Couche hétérogène	127	839
Couche homogène	146	1013

Tableau 1

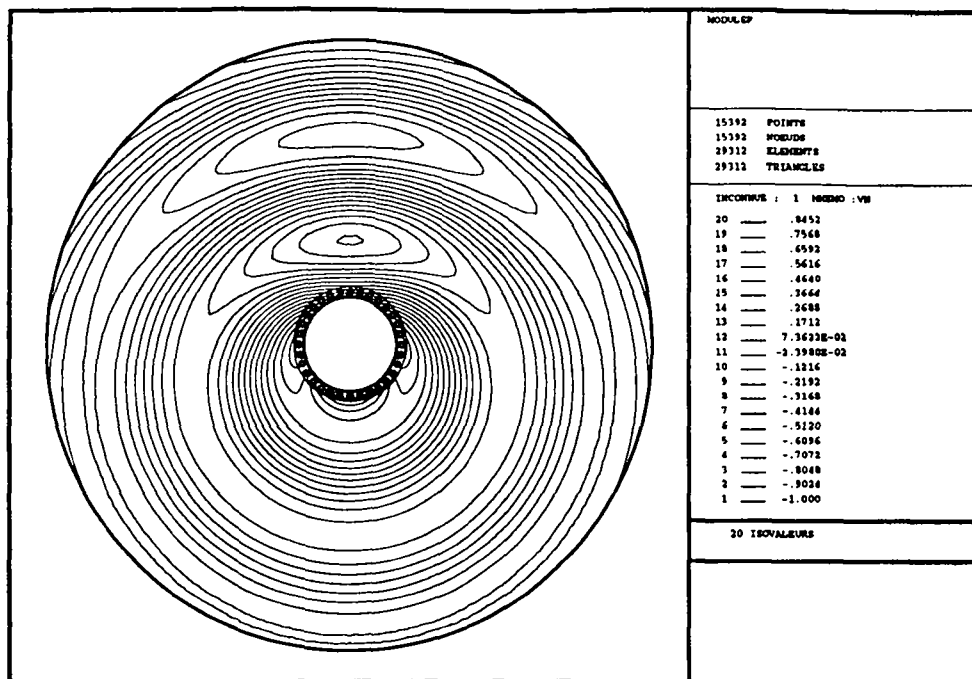


FIG. 3.3 - Onde diffractée dans le cas hétérogène

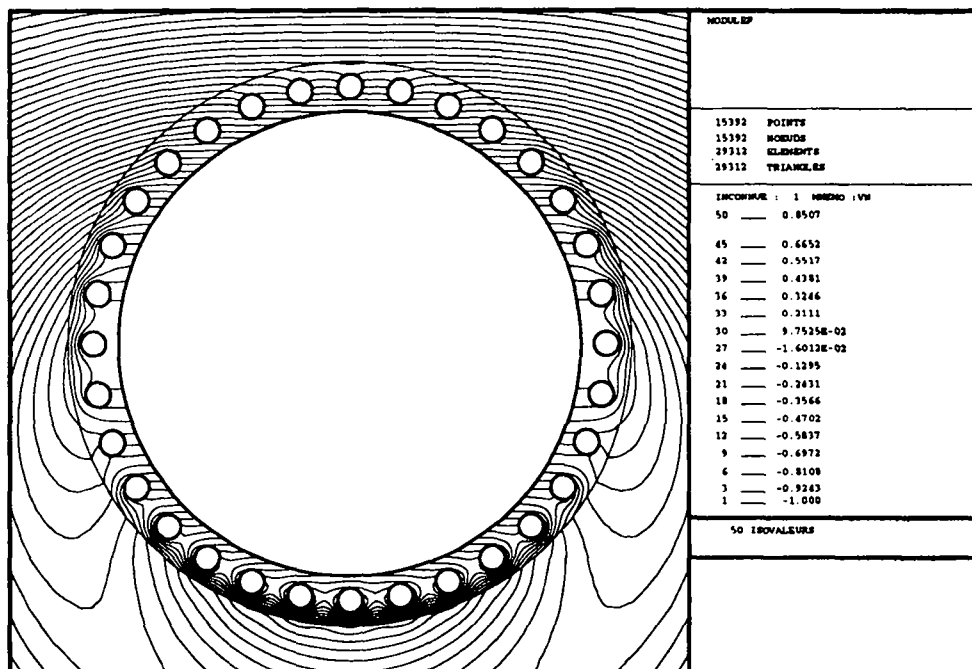


FIG. 3.4 - Zoom autour de l'obstacle dans le cas hétérogène

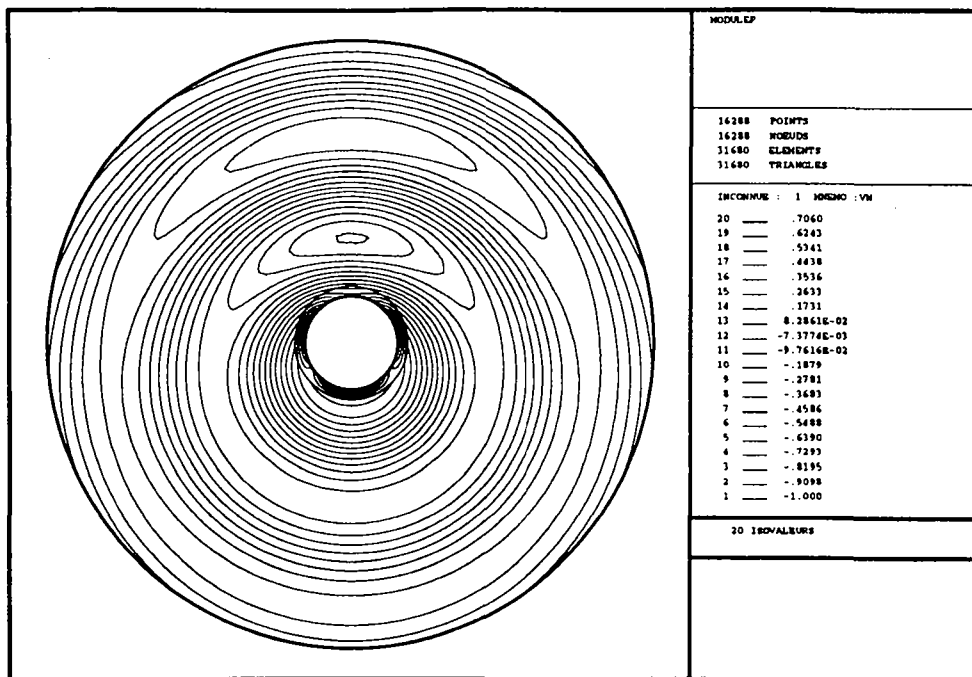


FIG. 3.5 - Onde diffractée dans le cas homogène

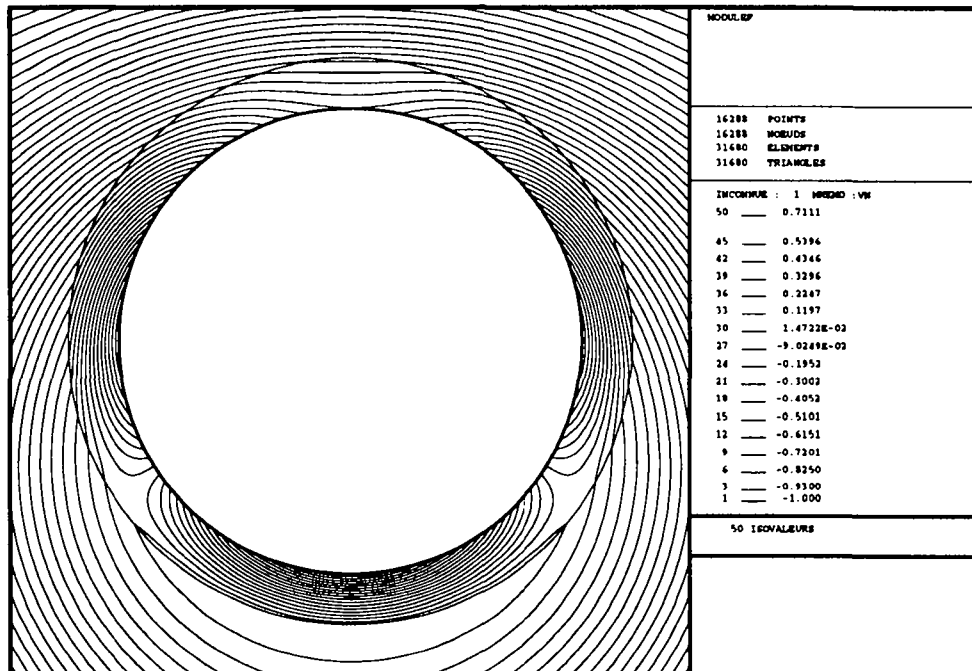


FIG. 3.6 - Zoom autour de l'obstacle dans le cas homogène

## 4 Condition aux Limites Equivalente (C.L.E.) : étude du problème sur une cellule élémentaire

Dans ce chapitre, nous cherchons à introduire une Condition aux Limites Equivalente (C.L.E.) sur une frontière artificielle  $\Gamma_h$  placée à une certaine distance  $h$  de  $\Gamma$  petite devant le rayon de courbure de  $\Gamma$  (cf. Fig. 4.1).

L'effet de cette condition aux limites doit être équivalent à l'effet de la couche de matériau composite qui recouvre l'obstacle. De cette façon, la C.L.E. nous permet de remplacer l'étude du problème initial (2.14) dans le domaine entier par l'étude d'un problème équivalent dans un domaine simplifié et réduit, le domaine extérieur à  $\Gamma_h$ . On évite ainsi d'avoir à mailler très finement la région des billes pour pouvoir les prendre en compte correctement.

On note  $\Omega_1^1$  le domaine borné intérieurement par  $\Gamma_h$  et extérieurement par  $\Sigma$ , et  $\Omega_1^2$  le domaine borné intérieurement par  $\Gamma_\delta$  et extérieurement par  $\Gamma_h$ . On a ainsi  $\Omega_1^T = \Omega_1^1 \cup \Omega_1^2 \cup \Gamma_h$ .

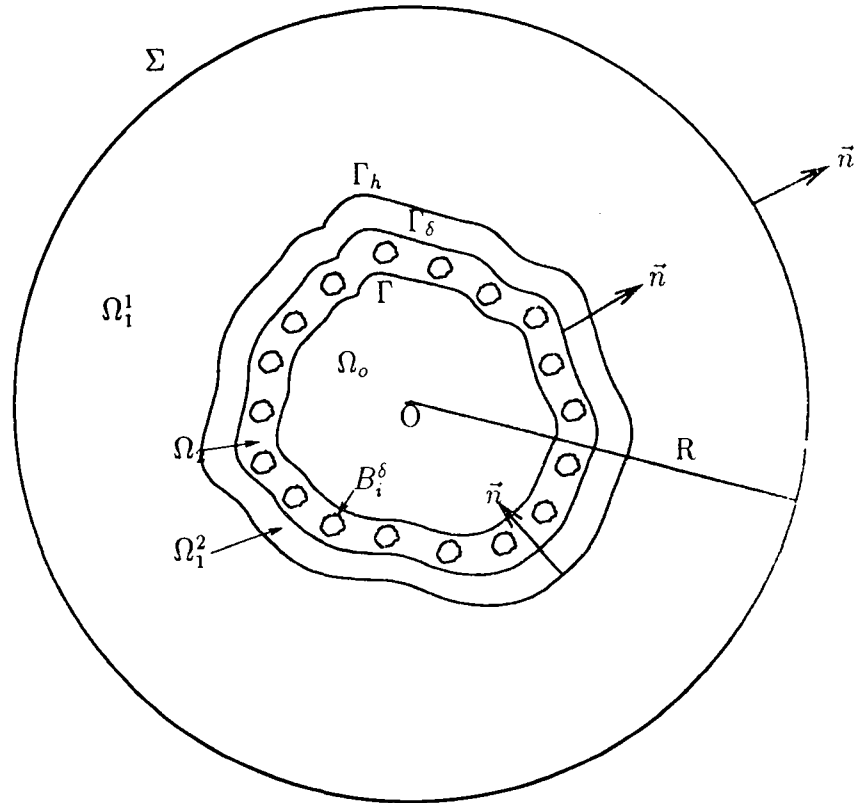


FIG. 4.1 - Domaine d'étude pour la C.L.E.

Dans cette étude, l'idée de base (inspirée de P. Le Tallec et A. Carrau, cf. [C]) est de considérer que la solution  $u$  du problème (2.14) peut être décomposée en une solution  $u^i$  dans le domaine  $\Omega_2 \cup \Omega_1^2$  et  $u^e$  dans le domaine  $\Omega_1^1$ .

En effet, le problème (2.14) revient à trouver  $u^i$  et  $u^e$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u^i \right) + \varepsilon \omega^2 u^i = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \cup \Omega_1^2, \\ (b) & u^i = 0 \quad \text{sur } \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N \partial B_i^\delta, \\ (c) & [u^i]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ (d) & \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial u^i}{\partial n} \right]_{\Gamma_\delta} = 0, \\ (e) & \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_1} \vec{\nabla} u^e \right) + \varepsilon_1 \omega^2 u^e = 0 \quad \text{dans } \Omega_1^1, \\ (f) & \frac{\partial u^e}{\partial n} = -M u^e + M u^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma, \\ (g) & u^i = u^e \quad \text{sur } \Gamma_h, \\ (h) & \frac{\partial u^i}{\partial n} = \frac{\partial u^e}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_h. \end{array} \right.$$

Tout d'abord, nous nous intéressons au problème en  $u^i$  donné par les équations (a) à (d) et (g).

La frontière  $\Gamma_h$  étant placée à une distance  $h$  de  $\Gamma$  suffisamment petite par rapport au rayon de courbure de  $\Gamma$ , on remarque alors qu'il est raisonnable de considérer localement  $\Gamma$ ,  $\Gamma_\delta$  et  $\Gamma_h$  comme des segments de droite  $\Gamma^d$ ,  $\Gamma_\delta^d$  et  $\Gamma_h^d$  (cf. Fig. 4.2).

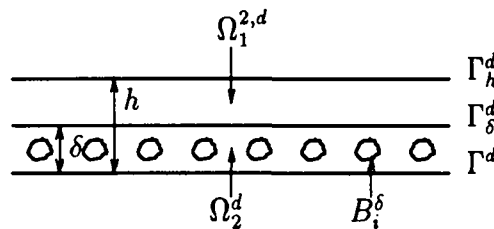


FIG. 4.2 - Domaine plan

Par ailleurs, si  $u^e$  varie peu sur  $\Gamma_h$ , la répartition des billes étant périodique de période  $d\delta$ , nous pouvons admettre que la solution est aussi périodique de période  $d\delta$ . Nous pouvons alors ramener l'étude du problème en  $u^i$  à l'étude d'un problème dans une cellule élémentaire droite  $C$  de largeur  $d\delta$  (cf. Fig. 4.3). A noter que l'hypothèse " $u^e$  varie peu sur  $\Gamma_h$ " est raisonnable puisque la longueur d'onde incidente



est supposée grande par rapport à  $\delta$  et à  $h$ , et puisque  $\Gamma_h$  est une frontière régulière.

Nous notons  $C_1^2, C_2, B, \gamma, \gamma_\delta$  et  $\gamma_h$  les domaines et frontières de  $C$  correspondant respectivement à  $\Omega_1^2, \Omega_2, B_i^\delta, \Gamma, \Gamma_\delta$  et  $\Gamma_h$  dans le domaine global. De plus, nous désignons par  $l_1$  et  $l_2$  les bords latéraux de la cellule qui relient  $\gamma$  à  $\gamma_h$ .

Nous notons par ailleurs  $(\vec{e}^1, \vec{e}^2)$  une base orthonormée cartésienne de  $\mathbb{R}^2$  avec  $\vec{e}^2$  suivant la hauteur de la cellule et  $(y_1, y_2)$  les coordonnées.

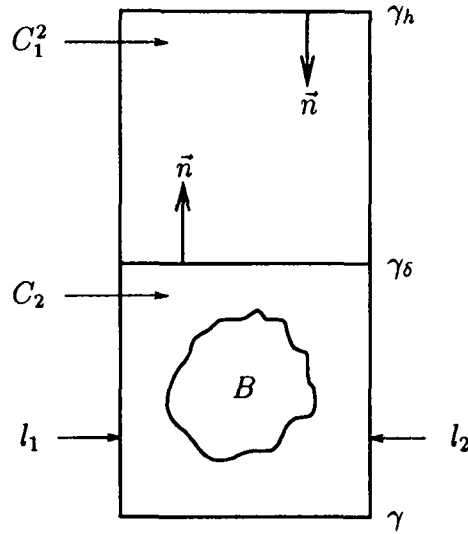


FIG. 4.3 - La cellule élémentaire  $C$

En outre, nous approchons  $u^e|_{\gamma_h}$  par sa valeur moyenne sur  $\gamma_h$ . Ainsi, nous supposons  $u^e|_{\gamma_h} = g$  avec  $g$  une constante complexe non nulle.

Dans la cellule élémentaire,  $u^i$  vérifie donc le système suivant :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u^i \right) + \varepsilon \omega^2 u^i = 0 & \text{dans } C_2 \cup C_1^2, \\ u^i = 0 & \text{sur } \gamma \cup \partial B, \\ [u^i]_{\gamma_\delta} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial u^i}{\partial n} \right]_{\gamma_\delta} = 0, \\ u^i = g & \text{sur } \gamma_h, \\ u^i(y_1, y_2) \text{ } y_1\text{-périodique sur } C. \end{array} \right.$$

Le système (4.1) étant linéaire, sa solution  $u^i$  peut s'écrire sous la forme :

$$(4.2) \quad u^i = v g = v u^e|_{\gamma_h} \quad \text{dans } C_2 \cup C_1^2,$$

où  $v$  est la solution du problème :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} v \right) + \varepsilon \omega^2 v = 0 & \text{dans } C_2 \cup C_1^2, \\ v = 0 & \text{sur } \gamma \cup \partial B, \\ [v]_{\gamma_h} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{\gamma_h} = 0, \\ v = 1 & \text{sur } \gamma_h, \\ v(y_1, y_2) \text{ } y_1\text{-périodique sur } C. \end{array} \right.$$

En reportant l'équation (4.2) dans (h), nous avons alors :

$$(4.4) \quad \frac{\partial u^e}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} u^e \quad \text{sur } \gamma_h.$$

Ainsi, nous obtenons une C.L.E. sur  $\gamma_h$  de la forme :

$$\frac{\partial u^e}{\partial n} \Big|_{\gamma_h} = -\alpha u^e \Big|_{\gamma_h},$$

avec  $\alpha = -\left\langle \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\gamma_h} \right\rangle$ , - la moyenne de  $\frac{\partial v}{\partial n}$  sur la frontière  $\gamma_h$ .

De part la périodicité du domaine et de la solution, cette formule reste vraie sur tout le segment de droite  $\Gamma_h^d$ .

Finalement, nous avons donc :

$$(4.5) \quad \frac{\partial u^e}{\partial n} \Big|_{\Gamma_h} = -\alpha u^e \Big|_{\Gamma_h}.$$

Ainsi, nous pouvons remplacer l'étude du problème (2.14) par celle du problème suivant :

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \text{ tel que :} \\ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_1} \vec{\nabla} u \right) + \varepsilon_1 \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_1^1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u & \text{sur } \Gamma_h, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -Mu + Mu^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Pour définir la formulation variationnelle du problème (4.1), nous introduisons l'espace fonctionnel suivant :

$$* V = \left\{ v \ ; \ v \in H^1(G) \ ; \ v = 0 \quad \text{sur } \gamma_h \cup \gamma \cup \partial B \ ; \ v(y_1, y_2) \text{ } y_1\text{-périodique sur } C \right\},$$

avec  $G = C_2 \cup C_1^2$ .

Nous avons alors la formulation variationnelle suivante :

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} g \text{ constante complexe non nulle donnée,} \\ \text{trouver } u, (u - g\chi_{\gamma_h}) \in V \\ \text{tel que :} \\ \int_G \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \bar{v} - \varepsilon \omega^2 u \bar{v} \right) dx = 0 \quad , \forall v \in V, \end{array} \right.$$

où  $\chi_{\gamma_h}$  désigne la fonction caractéristique de  $\gamma_h$ .

On trouvera dans [A] un résultat d'existence et d'unicité relatif au problème (4.7).

On montre aussi par des arguments classiques que la solution de (4.7) est solution de (4.1).

## 5 Etude numérique de C.L.E. dans le cas d'un revêtement homogène.

Le but de cette section est de tester et de valider numériquement quelques C.L.E. dans le cas où le matériau qui recouvre l'obstacle est homogène. Ceci en utilisant la même méthode d'éléments finis  $\mathbb{P}^1$  et la même méthode de résolution que celles décrites dans le chapitre 3.

Le problème à résoudre est le problème (4.6) où  $\alpha$  est une constante complexe non nulle et  $\vec{n}$  est la normale unitaire au bord de  $\Omega_1^1$  orientée vers l'extérieur.

### 5.1 Formulation faible et discrétisation

Dans un premier temps, nous définissons la formulation faible du problème (4.6). Elle s'écrit classiquement :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega_1^1) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega_1^1} \left( \frac{1}{\mu_1} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \bar{v} - \varepsilon_1 \omega^2 u \bar{v} \right) dx \\ + \frac{1}{\mu_1} \alpha \int_{\Gamma_h} u \bar{v} d\gamma + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma} M u \bar{v} d\sigma \\ = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma} (M u^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}) \bar{v} d\sigma \end{array} \right. , \forall v \in H^1(\Omega_1^1).$$

On démontrera par ailleurs l'existence et l'unicité de la solution de (5.1) en adaptant les arguments utilisés dans [A].

De façon classique, on montre alors que la solution de (5.1) est solution de (4.6).

Pour résoudre numériquement le problème (5.1), nous utilisons à nouveau une approximation par une méthode d'éléments finis  $\mathbb{P}^1$  dont la description est tout à fait similaire à celle exposée dans le chapitre 3.

Les notations utilisées ici étant les mêmes que celles de la sous-section 3.1, nous n'en donnons que les nouvelles. Ainsi, on note :

- \*  $\bar{\Omega}_{1,h}^1$  une approche polygonale du domaine  $\bar{\Omega}_1^1$ , de frontières  $\Gamma_{h,h}$  et  $\Sigma_{h,h}$ ,
- \*  $\eta_4$  l'ensemble des noeuds de la triangulation appartenant à  $\Gamma_{h,h}$ .

Le système obtenu s'écrit alors :

$$(5.2) \quad Au = F \quad \text{dans } \mathbb{C}^N,$$

où :

\*  $A$  est la matrice carrée, complexe, symétrique définie par :

$$A = B + C + D,$$

avec :

$$* B_{ij} = \int_{\Omega_{1,h}^1} \left( \frac{1}{\mu_1} \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_j - \varepsilon_1 \omega^2 \varphi_i \varphi_j \right) dx, \quad i, j \in \eta,$$

$$* C_{ij} = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma,h} M_i \varphi_i \varphi_j d\sigma, \quad i, j \in \eta_2,$$

$$* D_{ij} = \frac{1}{\mu_1} \alpha \int_{\Gamma_{h,h}} \varphi_i \varphi_j d\gamma, \quad i, j \in \eta_4,$$

\*  $M_i$  l'opérateur DtN dans lequel on a tronqué la série à l'indice  $N_i$ ,

$$* u = (u_j(a_j))_{j \in \eta},$$

\*  $F = (F_{hi})_{i \in \eta_2}$  est défini par :

$$F_{hi} = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Sigma,h} \left( M u^{inc} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \right) \varphi_i dx.$$

## 5.2 C.L.E. utilisées

Dans cette section, nous donnons un exemple de calcul explicite d'une C.L.E. sur  $\Gamma_h$  et sur  $\Gamma_\delta$ .

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, ceci revient en fait à ramener notre étude sur une cellule élémentaire droite et à trouver  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  tel que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u \quad \text{sur } \gamma_h.$$

Rappelons le système d'équations que vérifie  $u$  dans la cellule élémentaire  $C$ , pour le cas homogène. Il s'écrit :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} u \right) + \varepsilon \omega^2 u = 0 & \text{dans } C_2 \cup C_1^2, \\ u = 0 & \text{sur } \gamma, \\ [u]_{\gamma_\delta} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\gamma_\delta} = 0, \\ u = g & \text{sur } \gamma_h, \\ u(y_1, y_2) \text{ } y_1\text{-périodique sur } C, \end{array} \right.$$

où  $g$  est une constante complexe non nulle donnée.

Un calcul analytique simple montre que la solution  $u$  du problème (5.3) peut s'écrire :

$$\forall \delta, 0 < \delta < h,$$

$$u(y_1, y_2) = u(y_2) = \begin{cases} (a') & u|_{\gamma_s} \frac{\sin(y_2 k_2)}{\sin(\delta k_2)} & \text{dans } C_2, \\ (b') & g \frac{\sin[(y_2 - \delta)k_1]}{\sin[(h - \delta)k_1]} \\ & + u|_{\gamma_s} \frac{\sin[(y_2 - h)k_1]}{\sin[(\delta - h)k_1]} & \text{dans } C_1^2. \end{cases}$$

De part la condition de transmission  $[\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial n}]_{\gamma_s} = 0$ ,  $u|_{\gamma_s}$  s'écrit :

$$\forall \delta, 0 < \delta < h,$$

$$(5.4) \quad u|_{\gamma_s} = \frac{k_1}{\mu_1} \frac{1}{[\frac{k_2}{\mu_2} \frac{1}{\tan(\delta k_2)} - \frac{k_1}{\mu_1} \frac{1}{\tan[(\delta - h)k_1]}] \sin[(h - \delta)k_1]} g.$$

Par ailleurs, (b') nous donne :

$$\forall \delta, 0 < \delta < h,$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma_h} = -k_1 \frac{1}{\tan[(h - \delta)k_1]} g - k_1 \frac{1}{\sin[(\delta - h)k_1]} u|_{\gamma_s}.$$

D'où :

$$\forall \delta, 0 < \delta < h,$$

$$(5.6) \quad u|_{\gamma_s} = -\frac{1}{k_1} \sin[(\delta - h)k_1] \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma_h} + \cos[(\delta - h)k_1] g.$$

En réécrivant (5.4) sous la forme :

$$\forall \delta, 0 < \delta < h,$$

$$(5.7) \quad [\frac{k_2}{\mu_2} \frac{1}{\tan(\delta k_2)} - \frac{k_1}{\mu_1} \frac{1}{\tan[(\delta - h)k_1]}] u|_{\gamma_s} = \frac{k_1}{\mu_1} \frac{1}{\sin[(h - \delta)k_1]} g,$$

et en remplaçant dans cette expression  $u|_{\gamma_s}$  par (5.6), nous obtenons :

$\forall \delta, 0 < \delta < h,$

$$(5.8) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma_h} = - \frac{k_1 \tan(\delta k_2) + k_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\tan[(\delta - h)k_1]}}{-\frac{k_2 \mu_1}{k_1 \mu_2} + \frac{\tan(\delta k_2)}{\tan[(\delta - h)k_1]}} g.$$

Lorsque  $\delta$  est proche de 0, nous en déduisons, en remplaçant  $\tan(\delta k_2)$  par  $\delta k_2$ :

$\forall \delta, 0 < \delta \leq h, \delta \simeq 0,$

$$(5.9) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma_h} = - \frac{1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta k_1 \tan[(\delta - h)k_1]}{-\frac{\mu_1}{\tan[(\delta - h)k_1]} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta} g + 0(\delta).$$

Lorsque de plus  $h$  est proche de  $\delta$ , nous obtenons la formule:

$\forall \delta, 0 < \delta \leq h, \delta \simeq \delta - h \simeq 0,$

$$(5.10) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma_h} = - \frac{1}{h - \delta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta} g + 0(\delta).$$

Lorsque  $\delta = h$ , nous retrouvons sur  $\gamma_\delta$  la formule dite de Léontovich (cf. [EN]):

$\forall \delta, \delta > 0, \delta \simeq 0,$

$$(5.11) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma_\delta} = - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\delta} g + 0(\delta).$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, de part la périodicité du "domaine plan" et de la solution, les formules (5.8), (5.9), (5.10) et (5.11) nous donnent sur  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_\delta$  les C.L.E. suivantes:

\*  $\forall \delta, 0 < \delta < h,$

$$(5.12) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_h} = - \frac{k_1 \tan(\delta k_2) + k_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\tan[(\delta - h)k_1]}}{-\frac{k_2 \mu_1}{k_1 \mu_2} + \frac{\tan(\delta k_2)}{\tan[(\delta - h)k_1]}} u|_{\Gamma_h},$$

\* Lorsque  $\delta$  est proche de 0,

$\forall \delta, 0 < \delta \leq h,$

$$(5.13) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_h} = - \frac{1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta k_1 \tan[(\delta - h)k_1]}{-\frac{\mu_1}{\tan[(\delta - h)k_1]} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta} u|_{\Gamma_h} + 0(\delta),$$

\* Lorsque  $\delta$  et  $h$  sont proches de 0,

$\forall \delta, 0 < \delta \leq h,$

$$(5.14) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_h} = -\frac{1}{h - \delta + \frac{\mu_2}{\mu_1}\delta} u|_{\Gamma_h} + 0(\delta),$$

\* Lorsque  $\delta$  est proche de 0 et  $h = \delta$ ,

$\forall \delta, \delta > 0,$

$$(5.15) \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_\delta} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\delta} u|_{\Gamma_\delta} + 0(\delta).$$

Par la suite, nous appellerons C.L.E. (5.8), (5.9), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) et (5.15) les C.L.E. données par les formules correspondantes.

Dans un premier temps, nous désirons tester sur la cellule élémentaire, l'efficacité et la précision des C.L.E. précédemment établies. Dans ce but, nous résoudrons numériquement le problème (5.3) afin d'en déduire la valeur moyenne de  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sur  $\gamma_h$  et de la comparer à celles données par les (C.L.E.) (5.8), (5.9) et (5.10).

Pour le problème (5.3), nous utilisons la même méthode d'éléments finis  $P^1$  que celle décrite au chapitre 3. Pour résoudre le système linéaire obtenu, nous utiliserons comme précédemment la méthode GMRES et préconditionnerons par la matrice du système factorisée par une méthode de CROUT incomplet.

### 5.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques expériences numériques relatives à la résolution du problème (4.6) avec les différentes C.L.E. établies précédemment dans la section 5.2.

Ainsi, notre but est de comparer les résultats obtenus en utilisant une C.L.E sur  $\Gamma_h$  ou sur  $\Gamma_\delta$  avec ceux que donnent la résolution du problème (2.14) dans le domaine global.

#### 5.3.1 Résultats sur la cellule élémentaire

Tout d'abord, nous donnons quelques résultats visant à valider numériquement les C.L.E. (5.8), (5.9) et (5.10) sur la frontière  $\gamma_h$  de la cellule élémentaire et lorsque  $h = \delta$ , la C.L.E. (5.11) sur la frontière  $\gamma_\delta$ .



Pour cela, nous commençons par résoudre le problème (5.3) d'où nous déduisons la valeur moyenne de la dérivée normale de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , sur  $\gamma_h$ . Nous entendons par valeur moyenne la moyenne arithmétique des valeurs de  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en chacun des noeuds du maillage appartenant à  $\gamma_h$ .

Nous donnons rapidement la démarche adoptée pour calculer ces valeurs :

Comme  $u(y_1, y_2)$  est  $y_1$ -périodique sur  $C$ , nous pouvons tout d'abord "imaginer" que la cellule  $C$  est en fait un cylindre en confondant ses côtés  $l_1$  et  $l_2$ .

En écrivant la formule de Green dans l'ouvert  $C_1^2$  et en utilisant le fait que  $\Delta u = -k_1^2 u$  dans  $C_1^2$ , nous avons :

$$(5.16) \quad \int_{\partial C_1^2} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{v} d\sigma = -k_1^2 \int_{C_1^2} u \bar{v} dx + \int_{C_1^2} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \bar{v} dx, \quad \forall v \in H^1(C_1^2).$$

Soit  $B_i$  le support de la fonction de base  $\varphi_i$  associée au noeud  $i$ ,  $i \in \gamma_h$ .

En remplaçant  $u$  par  $u_h$  et  $v$  par  $\varphi_i$  dans l'équation (5.16), nous déduisons :  
 $\forall i \in \gamma_h$ ,

$$\int_{B_i \cap \gamma_h} \frac{\partial u_h}{\partial n} \varphi_i d\sigma = \int_{B_i} (\vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} \varphi_i - k_1^2 u_h \varphi_i) dx.$$

Finalement, en appliquant la méthode d'intégration numérique dite "méthode des trapèzes", nous obtenons :

$\forall i \in \gamma_h$ ,

$$\frac{\partial u_h}{\partial n}(a_i) = \frac{2}{l(\sigma_i)} \left[ \sum_{j \in B_i} u_h(a_j) \int_{B_i} (\vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_j - k_1^2 \varphi_i \varphi_j) dx \right],$$

où  $l(\sigma_i)$  désigne la longueur du segment frontière  $B_i \cap \gamma_h$  et les intégrales se calculent de façon classique.

Nous pouvons ensuite calculer la moyenne des  $\frac{\partial u_h}{\partial n}(a_i)$ ,  $i \in \gamma_h$  et comparer sa valeur à celle que nous donne chacune des formules (5.8), (5.9), (5.10) et (lorsque  $h = \delta$ ) (5.11) établies précédemment.

Pour faire ces comparaisons, nous nous sommes fixés différentes valeurs de  $\delta$  et de  $h$ , petites devant le rayon de courbure de l'obstacle.

#### Remarque 5 :

Nous signalons que, pour des raisons de symétrie, les tests numériques qui suivent ont été effectués sur une demie cellule obtenue en divisant en deux dans le sens de la hauteur la cellule élémentaire initiale. Cette remarque reste vraie pour tout calcul numérique sur la cellule.

■

Ainsi nous nous sommes donnés les trois cas tests suivants :

**Cas test n° 1 :**

\* Le matériau diélectrique qui compose le domaine  $C_2$  d'épaisseur  $\delta$ , est caractérisé par les permittivité diélectrique et perméabilité magnétique relatives :

$$\varepsilon_r = 1 \quad ; \quad \mu_r = 2,56,$$

\* Le milieu contenu dans  $C_1^2$  a les caractéristiques du vide, c'est-à-dire  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$  et  $\mu_1 = \mu_0$ ,

$$* k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} = \pi \sqrt{2,56},$$

$$* k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = \pi,$$

\* La largeur de la demie cellule est égale à  $9,13 \cdot 10^{-2}$  m,

$$* \delta = 10^{-1} \text{ m},$$

$$* h = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m},$$

$$* g = 1,$$

\* Dans GMRES, la dimension de l'espace de Krylov est fixée à 30 et la précision à  $10^{-6}$ ,

\* La triangulation comporte 393 noeuds et 712 triangles (cf. Fig. 5.2).

**Cas test n° 2 :** il reprend le cas test n° 1 avec :

$$* \delta = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$* h = 10^{-1} \text{ m},$$

\* 224 noeuds et 394 triangles.

**Cas test n° 3 :** il reprend le cas test n° 1 avec :

$$* \delta = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

$$* h = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

\* 123 noeuds et 204 triangles.

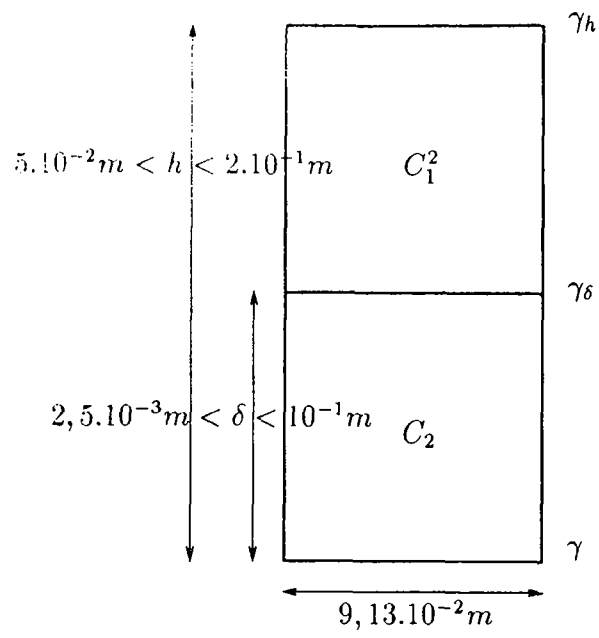


FIG. 5.1 - Cas de calcul

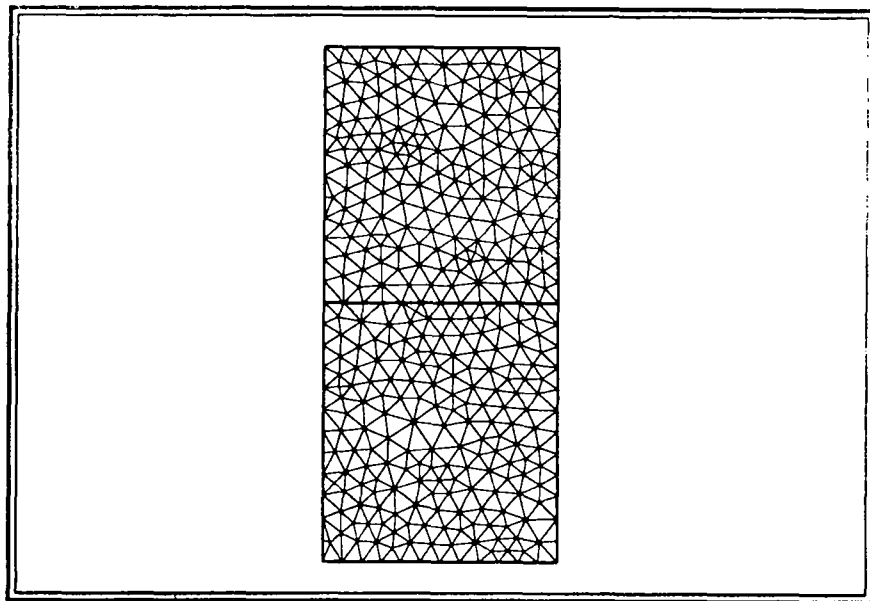


FIG. 5.2 - Maillage du cas test n° 1

Pour la C.L.E. (5.11) sur  $\gamma_\delta$ , nous avons repris les trois cas tests précédents mais lorsque  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$  et  $\delta = h$ . Ainsi, nous nous donnons :

**Cas test n° 1'**: il reprend le cas test n° 1 avec :

$$* \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o ; \mu_1 = \mu_2 = 2,56\mu_o,$$

$$* \delta = h = 2.10^{-1} \text{ m.}$$

**Cas test n° 2'**: il reprend le cas test n° 2 avec :

$$* \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o ; \mu_1 = \mu_2 = 2,56\mu_o,$$

$$* \delta = h = 10^{-1} \text{ m.}$$

**Cas test n° 3'**: il reprend le cas test n° 3 avec :

$$* \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o ; \mu_1 = \mu_2 = 2,56\mu_o,$$

$$* \delta = h = 5.10^{-2} \text{ m.}$$

Dans les résultats qui suivent, nous noterons (pour  $g = 1$ ) :

$$* < \frac{\partial u}{\partial n} |_{\gamma_h} >, \text{ la valeur moyenne de } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ sur } \gamma_h,$$

$$* \frac{\partial u}{\partial n(a)} = - \frac{k_1 \tan(\delta k_2) + k_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\tan[(\delta - h)k_1]}}{-\frac{k_2 \mu_1}{k_1 \mu_2} + \frac{\tan(\delta k_2)}{\tan[(\delta - h)k_1]}} g,$$

$$* \frac{\partial u}{\partial n(b)} = - \frac{1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta k_1 \tan[(\delta - h)k_1]}{-\frac{\tan[(\delta - h)k_1]}{k_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta} g,$$

$$* \frac{\partial u}{\partial n(c)} = - \frac{1}{h - \delta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \delta} g,$$

$$* \frac{\partial u}{\partial n(d)} = - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\delta} g.$$

\* Le tableau 2 donne, pour chacun des cas tests n<sup>os</sup> 1, 2 et 3, les valeurs de :

$$< \frac{\partial u}{\partial n} |_{\gamma_h} > - \frac{\partial u}{\partial n_{(a)}} , < \frac{\partial u}{\partial n} |_{\gamma_h} > - \frac{\partial u}{\partial n_{(b)}} , < \frac{\partial u}{\partial n} |_{\gamma_h} > - \frac{\partial u}{\partial n_{(c)}} ,$$

que nous notons respectivement :  $m - a$ ,  $m - b$  et  $m - c$ .

\* Le tableau 3 donne la valeur de  $< \frac{\partial u}{\partial n} |_{\gamma_h} > - \frac{\partial u}{\partial n_{(d)}}$  pour les cas tests n<sup>os</sup> 1', 2' et 3'. Nous la notons  $m - d$ .

### Conclusion :

Même s'il s'agit là de comparaisons entre valeurs numériques d'une part et valeurs analytiques d'autre part, ces résultats nous permettent en particulier de confirmer l'efficacité de la C.L.E. (5.8) sur  $\gamma_h$  quelques soient les valeurs de  $\delta$  et de  $h$ .

Par ailleurs, ces résultats nous font réaliser qu'il faut prendre  $\delta$  très proche de 0 et bien inférieur à  $2,5 \cdot 10^{-3}$  m pour obtenir une précision correcte en utilisant la C.L.E. (5.9). Plus exactement, comme cette C.L.E. est d'ordre 1 en  $\delta$ , nous pouvons prévoir qu'il faut prendre  $\delta$  inférieur à  $5,7 \cdot 10^{-6}$  m pour obtenir une erreur ne dépassant pas  $10^{-4}$ .

En ce qui concerne la C.L.E. (5.10), nous constatons qu'elle est toujours moins performante que les deux précédentes, quelques soient les valeurs de  $\delta$  et  $h$  testées. En effet, au contraire des deux autres, cette C.L.E. nécessite que  $\delta$  et  $h$  soient tous deux proches de 0. De plus, comme elle est d'ordre 1 en  $\delta$  et en  $h$ , les résultats obtenus indiquent qu'un  $\delta$  de  $1,1 \cdot 10^{-6}$  m et un  $h$  de  $2,2 \cdot 10^{-5}$  m sont des maximums pour obtenir une précision en  $10^{-4}$ .

En outre, les résultats du tableau 3 montrent qu'à  $\delta$  égal, la C.L.E. (5.11) sur  $\gamma_\delta$  se comporte de façon similaire à la C.L.E. (5.10) donnée sur  $\gamma_h$ . La C.L.E. sur  $\gamma_\delta$  semble même un peu plus efficace que celle sur  $\gamma_h$ , ce qui paraît naturel du fait qu'en se plaçant sur  $\gamma_\delta$ , on est le plus proche possible de la couche de diélectrique à représenter.

	$m - a$	$m - b$	$m - c$
Cas test n° 1	$-5,637.10^{-4}$	$-0,193$	$-0,947$
Cas test n° 2	$-8,283.10^{-4}$	$-8,851.10^{-2}$	$-0,458$
Cas test n° 3	$-8,999.10^{-4}$	$-4,375.10^{-2}$	$-0,228$

Tableau 2

	$m - d$
Cas test n° 1'	$-1,812$
Cas test n° 2'	$-0,859$
Cas test n° 3'	$-0,427$

Tableau 3

### 5.3.2 Résultats sur le domaine extérieur global

Nous présentons ici quelques résultats visant à établir et à comparer l'efficacité, dans le domaine extérieur global, des C.L.E. (5.12) et (5.15) sur les frontières  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_\delta$ .

Il s'agit en fait de comparer dans le domaine extérieur à  $\Gamma_h$  ou  $\Gamma_\delta$  la solution obtenue en résolvant le problème (4.6) et en utilisant les C.L.E. (5.12) ou (5.15) à celle que donne le problème (2.14), résolu dans tout le domaine.

Par ailleurs, nous comparons ces résultats à une solution analytique correspondant au problème (2.12) dont dérive (2.14), lorsque l'onde incidente est plane de direction l'axe  $\overrightarrow{OX_1}$ . Nous montrons dans l'Annexe A comment établir cette solution qui s'exprime, dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , sous la forme d'une série dont les termes s'écrivent à l'aide de fonctions de Bessel du 1er type et de fonctions de Hankel du 1er et 2ème type.

#### Remarque 6:

Nous avons choisi ici de ne pas tester les autres C.L.E. (5.13) et (5.14) établies sur  $\Gamma_h$  puisque les tests réalisés sur la cellule élémentaire ont déjà montré leur manque

d'efficacité par rapport à la C.L.E. (5.12).

■

Pour cela, nous nous fixons le cas test suivant :

- \* L'obstacle est un disque de rayon  $R_o = 4,59.10^{-1}$  m,

- \* Le matériau diélectrique qui le recouvre est caractérisé par les permittivité diélectrique et perméabilité magnétique relatives :

$$\varepsilon_r = 1 \quad ; \quad \mu_r = 2,56,$$

- \* Le milieu extérieur a les caractéristiques du vide, c'est-à-dire  $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$  et  $\mu_1 = \mu_o$ ,

- \*  $\delta = 5.10^{-2}m$ ,

- \*  $h = 10^{-1}$  m,

- \* L'onde incidente est plane, de longueur d'onde  $\lambda = 2$  m et se propage suivant l'axe  $0\vec{X}_1$  dans le sens  $x_1 > 0$  (cf. Fig. 5.3). Elle s'écrit :

$$u^{inc}(x) = e^{ik_1x_1},$$

avec  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi$ ,

- \* La frontière artificielle est placée à une distance  $1,2\lambda$  de l'extérieur de la couche,

- \* Dans GMRES, la dimension de l'espace de Krylov est fixée à 160 et la précision à  $10^{-6}$ ,

- \* La triangulation du domaine entier  $\Omega = \Omega_1^T \cup \Omega_2$  comporte 16128 noeuds et 31520 triangles,

- \* La triangulation du domaine  $\Omega_1^T$ , borné intérieurement par  $\Gamma_\delta$  et extérieurement par  $\Sigma$ , comporte 11488 noeuds et 22464 triangles,

- \* La triangulation du domaine  $\Omega_1^1$ , borné intérieurement par  $\Gamma_h$  et extérieurement par  $\Sigma$ , comporte 10144 noeuds et 19776 triangles,

- \* Pour toutes les triangulations, on a  $\frac{\lambda}{h} \simeq 20$ .

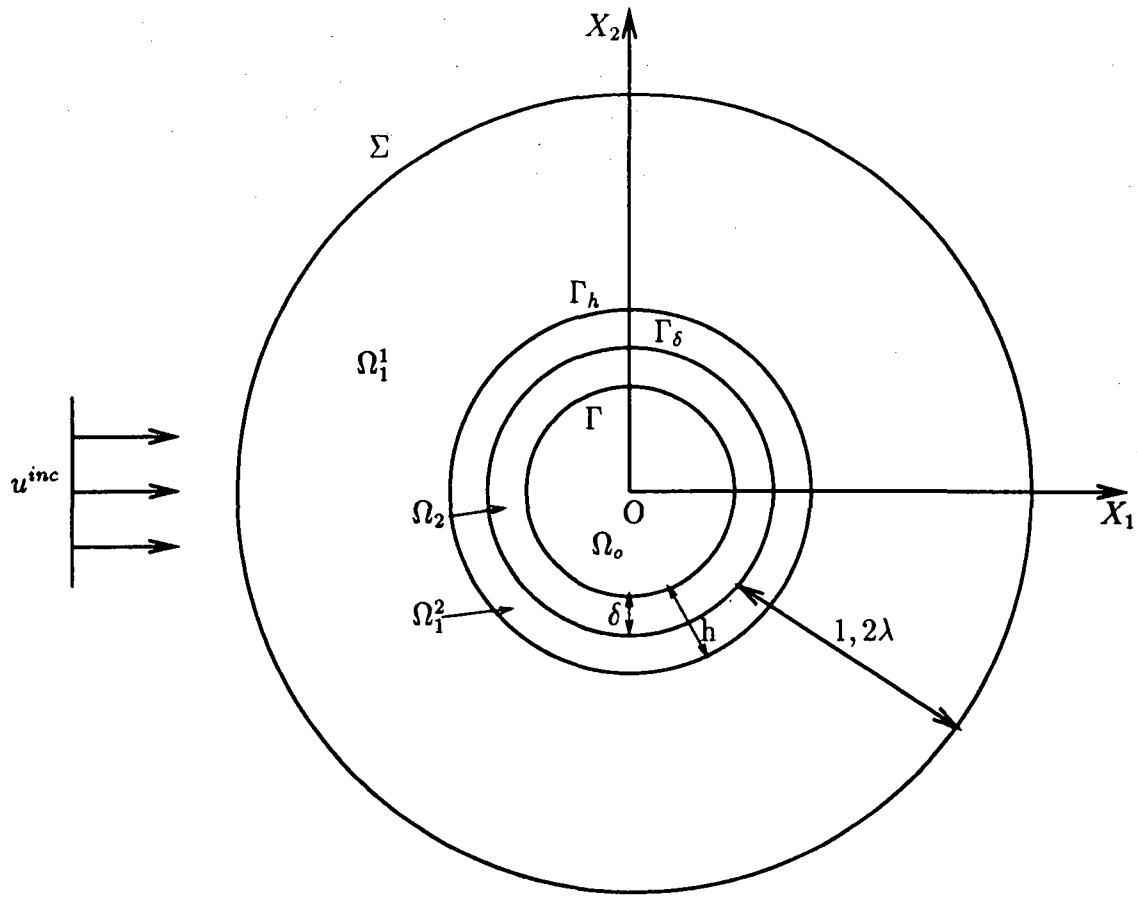


FIG. 5.3 - Cas de calcul

\* Le tableau 4 donne, pour le calcul de la solution dans tout le domaine et pour le calcul avec les C.L.E. (5.12) et (5.15) sur  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_\delta$ , le nombre d'itérations et le temps CPU nécessaires à la convergence de GMRES.

\* Le tableau 5 donne les erreurs relatives en norme  $H^1$  sur le domaine  $\Omega = \Omega_1^T \cup \Omega_2$ ,  $\Omega_1^T$  ou  $\Omega_1^1$  entre les parties réelles des différentes solutions obtenues.

\* Les figures 5.4 et 5.5 visualisent respectivement la solution analytique et la solution calculée dans le domaine entier ( $\Omega$ ).

\* Les figures 5.6 et 5.7 représentent respectivement la solution obtenue (dans  $\Omega_1^1$ ) en utilisant la C.L.E. (5.12) sur  $\Gamma_h$  et celle obtenue (dans  $\Omega_1^T$ ) avec la C.L.E. (5.15) sur  $\Gamma_\delta$ .



**Conclusion :**

Ces résultats mettent en évidence l'efficacité des C.L.E. (5.12) et (5.15) testées respectivement sur  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_\delta$ . Ils permettent ainsi de valider l'utilisation d'une C.L.E. afin de réduire le domaine de calcul et surtout le temps CPU de façon remarquable.

	Itérations	CPU
Solution calculée	156	1046
Solution avec la C.L.E. (5.12)	139	519
Solution avec la C.L.E. (5.15)	149	620

Tableau 4

	Erreur relative
Solution calculée / Solution analytique	0,987 %
Solution avec la C.L.E. (5.12) / Solution analytique	5,312 %
Solution avec la C.L.E. (5.12) / Solution calculée	4,803 %
Solution avec la C.L.E. (5.15) / Solution analytique	3,196 %
Solution avec la C.L.E. (5.15) / Solution calculée	2,666 %

Tableau 5

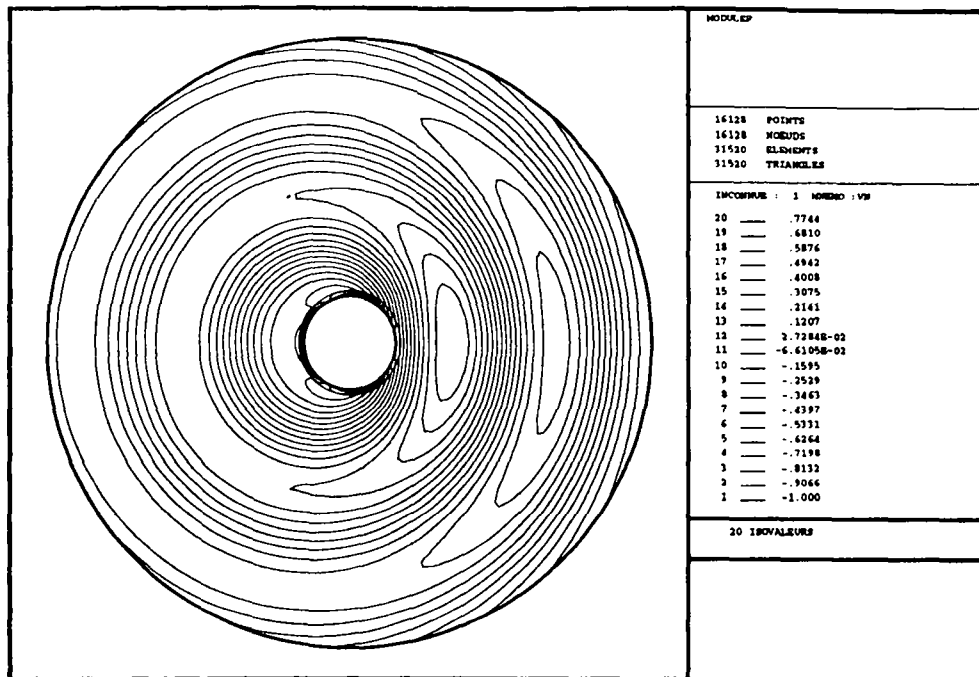


FIG. 5.4 - Solution analytique

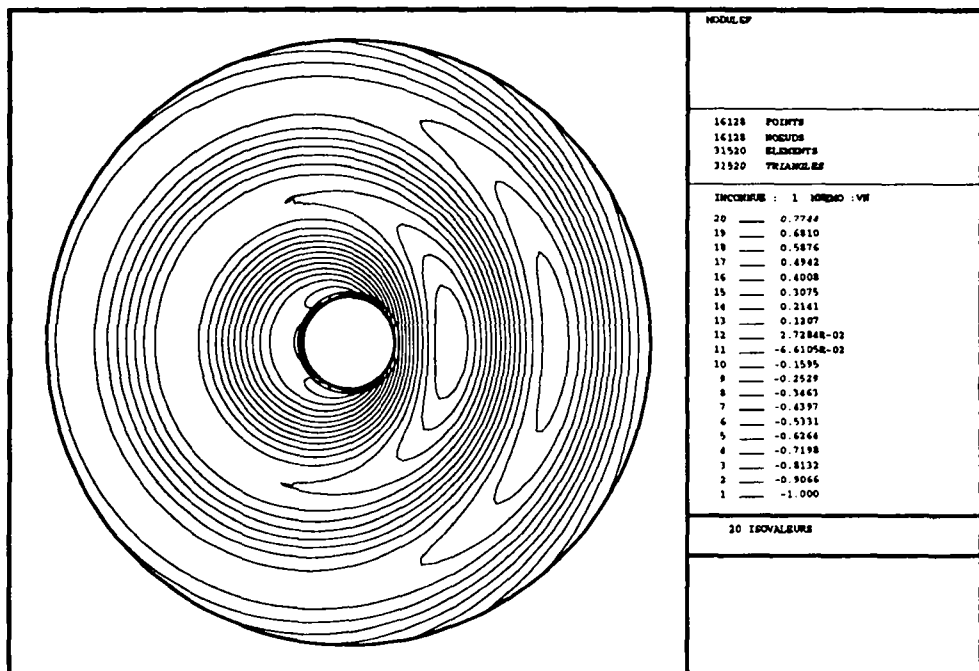


FIG. 5.5 - Solution calculée

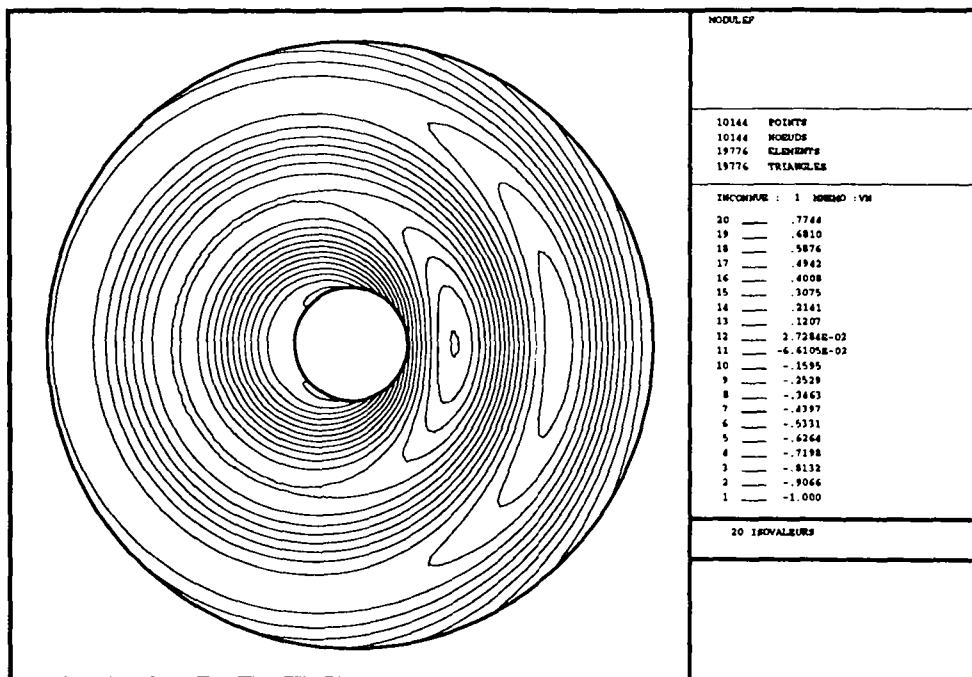


FIG. 5.6 - Solution avec la C.L.E. (5.12) sur  $\Gamma_h$

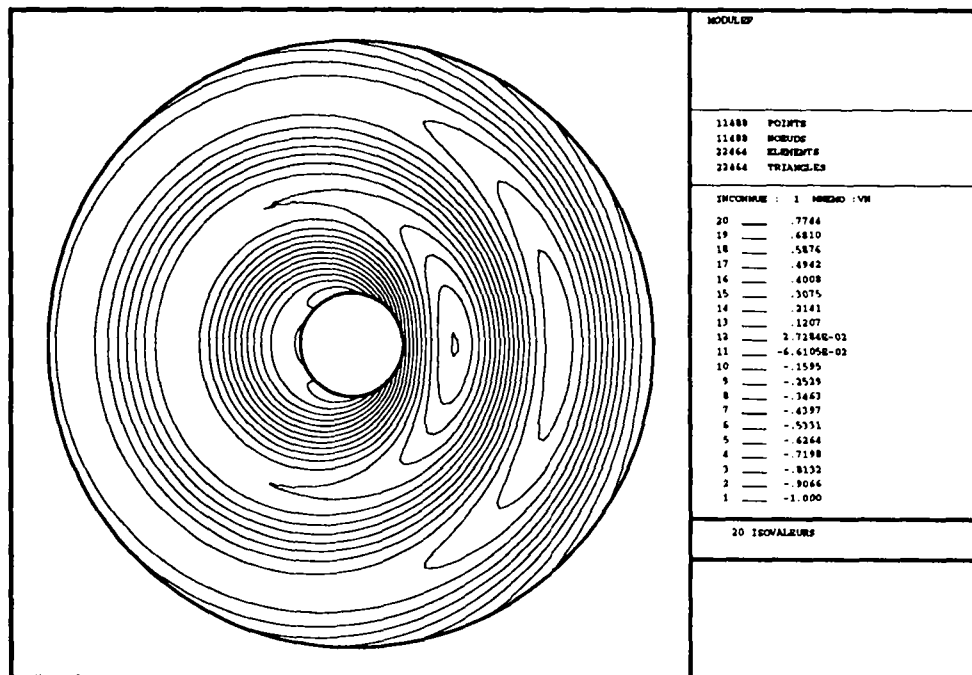


FIG. 5.7 - Solution avec la C.L.E. (5.15) sur  $\Gamma_\delta$

## 6 Etude numérique d'une C.L.E. dans le cas d'un revêtement hétérogène

Dans ce chapitre, nous voulons étudier le comportement numérique d'une C.L.E. sur  $\Gamma_h$  lorsque le matériau diélectrique qui recouvre l'obstacle inclut une structure périodique de billes parfaitement conductrices.

### 6.1 Résultats sur la cellule élémentaire

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, nous pouvons écrire une C.L.E. sur  $\Gamma_h$  sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_h} = -\alpha u|_{\Gamma_h},$$

avec  $\alpha = -\langle \frac{\partial v}{\partial n}|_{\gamma_h} \rangle$ , et  $v$  la solution du problème (4.3) donné dans la cellule élémentaire  $C$ .

Nous nous intéressons ici à l'évolution de  $\alpha$  en fonction du rayon de la bille de la cellule. Ainsi, nous effectuons une série de tests sur une cellule de taille fixée dont la bille réfléchissante est de diamètre variable.

Le cas test que nous utilisons est le suivant :

\* Le matériau diélectrique qui compose le domaine  $C_2$  d'épaisseur  $\delta$ , est caractérisé par les permittivité diélectrique et perméabilité magnétique relatives :

$$\varepsilon_r = 1 \quad ; \quad \mu_r = 2,56,$$

\* Le milieu contenu dans  $C_1^2$  a les caractéristiques du vide, c'est-à-dire  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$  et  $\mu_1 = \mu_0$ ,

$$* k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} = \frac{\pi}{15} \sqrt{2,56},$$

$$* k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = \frac{\pi}{15},$$

\* La largeur de la demi cellule est égale à  $5.10^{-1}$  m,

\*  $\delta = 1$  m,

\*  $h = 3$  m,

\* La demi bille est un demi disque de diamètre  $\rho\delta$  tel que  $1,5625.10^{-2}$  m  $< \rho\delta < 9.10^{-1}$  m.

\* Dans GMRES, la dimension de l'espace de Krylov est fixée à 95 et la précision à  $10^{-6}$ ,

\* La triangulation comporte  $N$  noeuds et  $N_T$  triangles avec  $2859 < N < 5971$  et  $5354 < N_T < 11604$ .

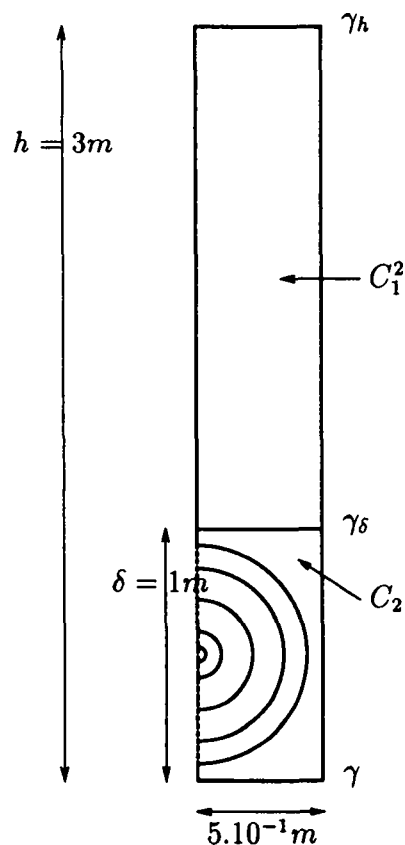


FIG. 6.1 - Cas de calcul

\* La figure 6.2 donne, à titre d'exemple, un zoom du maillage utilisé lorsque le rayon de la bille vaut  $1,25 \cdot 10^{-1}$  m.

\* La figure 6.3 visualise la solution du problème (4.3) obtenue sur le maillage partiellement représenté par la figure 6.2.

\* La figure 6.4 illustre le comportement de  $\alpha$  en fonction du rayon de la bille.

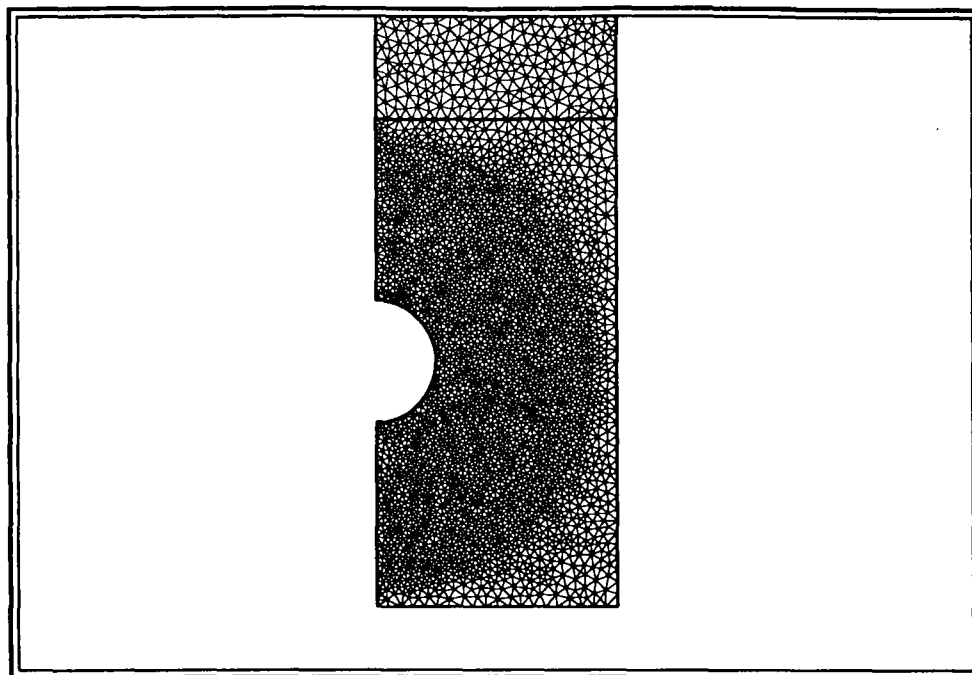


FIG. 6.2 - Zoom du maillage utilisé lorsque le rayon de la bille vaut  $1,25 \cdot 10^{-1}$  m

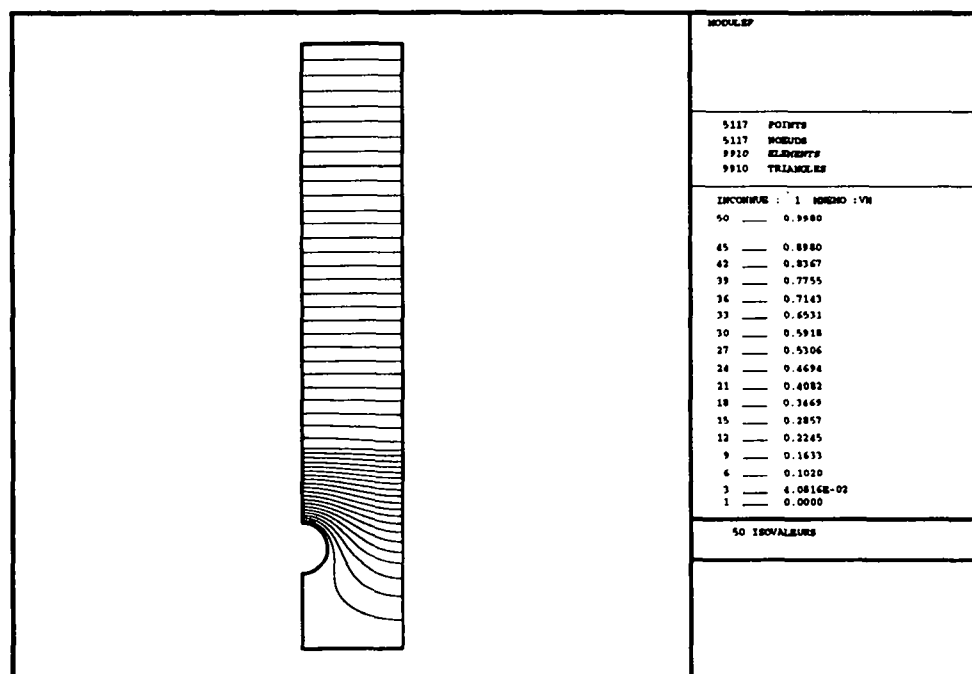


FIG. 6.3 - Sol. du problème (4.3) lorsque le rayon de la bille vaut  $1,25 \cdot 10^{-1}$  m

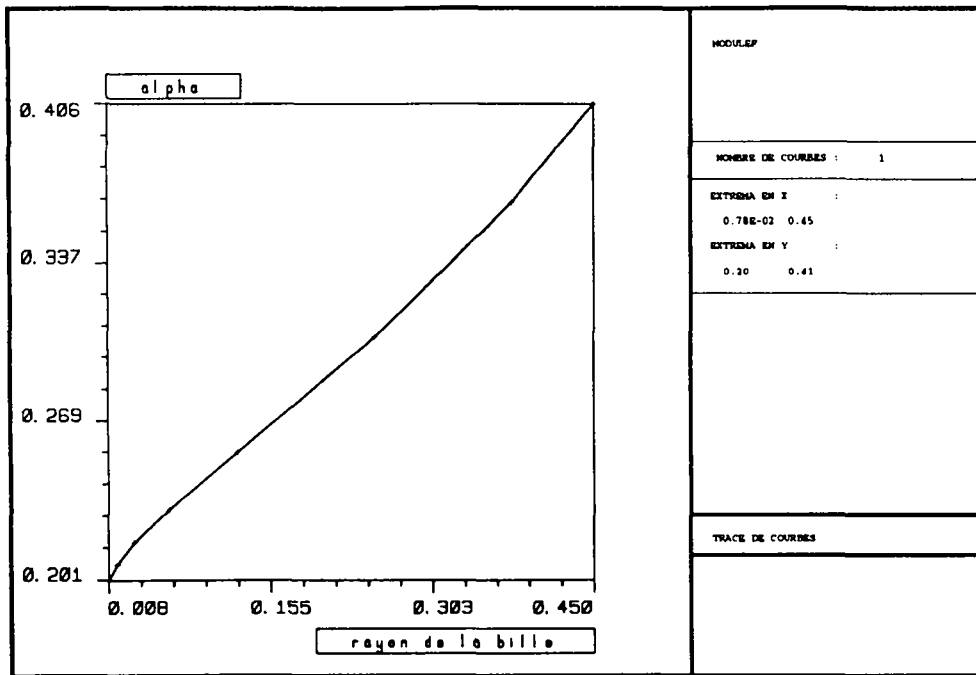


FIG. 6.4 - Evolution de  $\alpha$  en fonction du rayon de la bille

## 6.2 Résultats sur le domaine extérieur global

Dans cette sous-section, nous désirons comparer dans  $\Omega_1^1$  la solution du problème (4.6) avec celle du problème (2.14), en utilisant la C.L.E. (4.5) sur  $\Gamma_h$ .

Afin d'évaluer l'efficacité de cette C.L.E., nous nous fixons le cas test suivant :

- \* L'obstacle est un disque de rayon  $R_o = 4,59 \cdot 10^{-1}$  m,
- \* Le matériau diélectrique qui le recouvre et dans lequel sont plongées les billes est caractérisé par les permittivité diélectrique et perméabilité magnétique relatives :
$$\varepsilon_r = 1 \quad ; \quad \mu_r = 2,56,$$
- \* Les billes sont des disques de diamètre  $\rho\delta = 5 \cdot 10^{-2}$  m, espacés de  $d\delta = 10^{-1}$  m,
- \* Le milieu extérieur a les caractéristiques du vide, c'est-à-dire  $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$  et  $\mu_1 = \mu_o$ ,
- \*  $\delta = 10^{-1}$  m,



\*  $h = 2.10^{-1}$  m,

\* L'onde incidente est plane, de longueur d'onde  $\lambda = 2$  m et se propage suivant l'axe  $\vec{OX}_1$  dans le sens  $x_1 > 0$  (cf. Fig. 6.5).

Elle s'écrit :

$$u^{inc}(x) = e^{ik_1 x_1},$$

avec  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi$ ,

\* La frontière artificielle est placée à une distance  $1,2\lambda$  de l'extérieur de la couche,

\* Dans GMRES, la dimension de l'espace de Krylov est fixée à 140 et la précision à  $10^{-6}$ ,

\* La triangulation du domaine entier  $\Omega$  comporte 15392 noeuds et 29312 triangles,

\* La triangulation du domaine  $\Omega_1^1$ , borné intérieurement par  $\Gamma_h$  et extérieurement par  $\Sigma$ , comporte 8928 noeuds et 17440 triangles,

\* Pour les deux triangulations, on a  $\frac{\lambda}{h} \simeq 20$ .

Par ailleurs, la demie cellule élémentaire  $C$  utilisée pour résoudre le problème (4.3) a pour caractéristiques :

\* Une largeur de  $4,46.10^{-2}$  m,

\* 291 noeuds et 498 triangles.

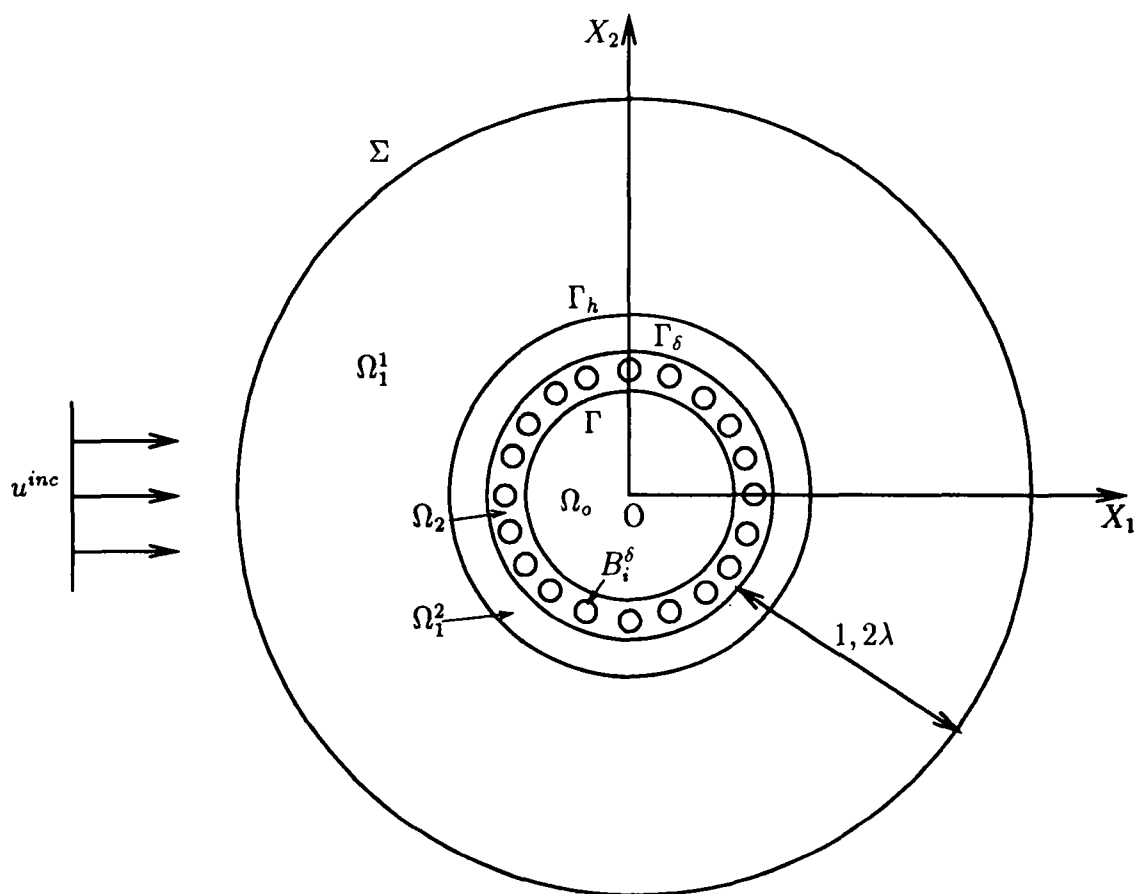


FIG. 6.5 - Cas de calcul

\* Le tableau 6 donne, pour le calcul de la solution dans le domaine entier et pour le calcul avec la C.L.E., le nombre d'itérations et le temps CPU nécessaires à la convergence de GMRES.

\* Les figures 6.6 et 6.7 représentent respectivement la solution calculée dans tout le domaine et la solution obtenue en utilisant la C.L.E. sur  $\Gamma_h$ .

\* L'erreur relative en norme  $H^1$  entre les deux solutions obtenues sur  $\Omega_1^1$  est de 7,135 %.

**Conclusion :**

De part la présence des hétérogénéités, la C.L.E. utilisée apparait légèrement moins précise que celles testées pour un revêtement homogène, mais le pourcentage d'erreur reste faible.

Ces résultats permettent ainsi de valider la méthode exposée au chapitre 4 et de confirmer l'utilité d'une C.L.E. dans le cas hétérogène. En effet, grâce à la C.L.E., nous avons considérablement réduit le nombre de noeuds du maillage tout en évitant de mailler la région des billes, et surtout nous avons diminué de plus de la moitié le temps CPU nécessaire à la résolution.

	Itérations	CPU
Solution calculée	126	850
Solution avec la C.L.E.	134	417

Tableau 6

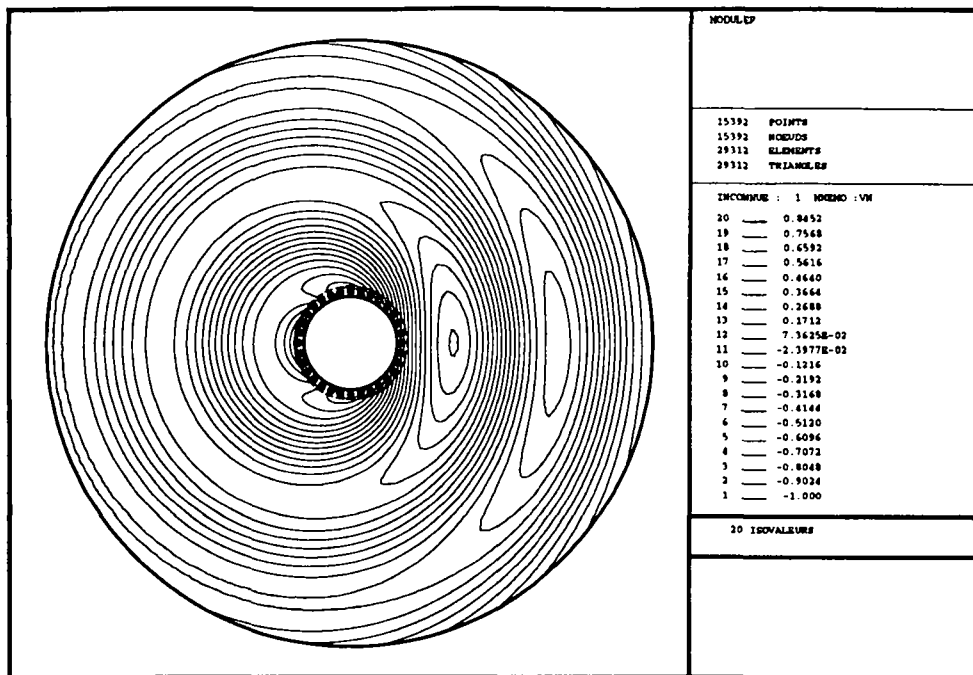


FIG. 6.6 - Solution calculée

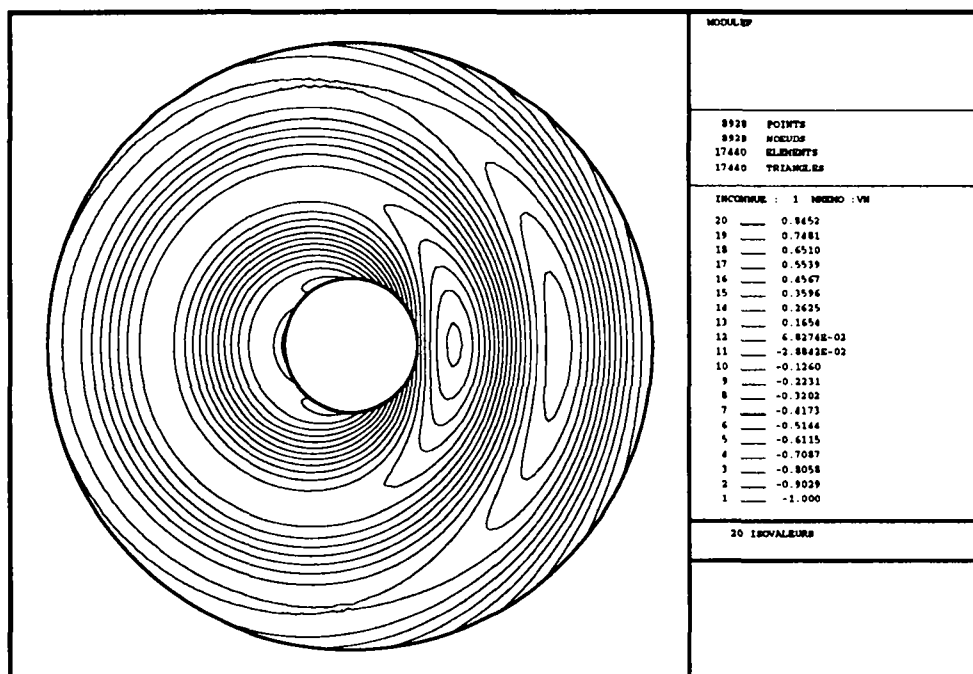


FIG. 6.7 - Solution avec la C.L.E. sur  $\Gamma_h$

## 7 Conclusion

Dans le cadre de la diffraction d'une onde électromagnétique, nous avons présenté une méthode numérique pour obtenir une C.L.E. visant à prendre en compte l'effet d'un revêtement composite autour d'un obstacle bidimensionnel.

Nous avons vu que la C.L.E. peut être entièrement déterminée par la résolution d'un problème linéaire simple dans une cellule élémentaire.

Dans un premier temps, les tests numériques ont permis de valider complètement l'utilisation d'une C.L.E., dans le cas d'un revêtement homogène et de C.L.E. calculées de manière explicite.

Les expériences effectuées dans le cas d'un revêtement hétérogène ont largement confirmé l'utilité d'une C.L.E. et démontré l'efficacité de la méthode exposée.

Dans tous les cas, l'utilisation d'une C.L.E. nous a permis (via un taux d'erreur très faible), de remplacer l'étude d'un problème sur un domaine délicat à mailler, par celle d'un problème similaire sur un domaine simplifié et réduit. Nous avons ainsi diminué de façon impressionnante le temps CPU nécessaire à la résolution de notre problème.

## Annexe A

### calcul de la solution analytique du problème initial

Dans cette annexe, nous donnons les principales étapes de calcul de la solution analytique du problème (2.12) dans le cas où l'obstacle est un disque de rayon  $R_0$  recouvert d'une couche homogène et où, l'onde incidente est plane et se propage suivant l'axe  $O\vec{X}_1$  dans le sens  $x_1 > 0$ . Elle s'écrit alors:

$$u^{inc}(x) = e^{ik_1 x_1},$$

avec  $k_1 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{T}$  et  $T$  la période.

Dans ces conditions et en notant  $u^d$  l'onde diffractée, le problème (2.12) s'écrit aussi :

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^d \text{ tel que:} & \\ \Delta u^d + k_1^2 u^d = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \Delta u^d + k_2^2 u^d = (k_1^2 - k_2^2) u^{inc} & \text{dans } \Omega_2, \\ u^d = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma, \\ [u^d]_{\Gamma_s} = 0, & \\ [\frac{1}{\mu}(\frac{\partial u^d}{\partial n} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n})]_{\Gamma_s} = 0, & \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r}(\frac{\partial u^d}{\partial r} - ik_1 u^d) = 0, & \end{array} \right.$$

avec  $k_i = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}}{T}$ , le nombre d'onde dans  $\Omega_i$ ,  $i=1,2$ .

Pour commencer, intéressons nous aux solutions  $u$  de l'équation de Helmholtz lorsque  $u$  est développé en série de Fourier.

Dans  $\mathbb{R}^2$ , le développement en série de Fourier d'une fonction  $u$  en coordonnées polaires s'écrit :

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n(r) e^{in\theta} \quad , \forall r \in [0, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

où  $\hat{u}_n$  désigne le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $u$ .

En coordonnées polaires, l'équation  $\Delta u + k^2 u = 0$  s'écrit par ailleurs :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0,$$

d'où nous déduisons l'écriture en base de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{d^2 \hat{u}_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{u}_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \hat{u}_n + k^2 \hat{u}_n \right) e^{in\theta} = 0.$$

Posons  $s = kr$  et appelons  $\hat{v}_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telle que  $\hat{v}_n(s) = \hat{u}_n(r)$ . Nous obtenons alors :

$$(7.2) \quad s^2 \frac{d^2 \hat{v}_n}{ds^2} + s \frac{d \hat{v}_n}{ds} + (s^2 - n^2) \hat{v}_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation (7.2) (cf. [AS]) sont les fonctions de Bessel d'ordre  $n$  du premier type  $J_{\pm n}$ , du second type  $Y_n$  et du troisième type  $H_n^{(1)}$ ,  $H_n^{(2)}$  (ces dernières étant aussi appelées fonctions de Hankel d'ordre  $n$  du premier et second type).

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} * H_n^{(1)}(z) &= J_n(z) + iY_n(z), \\ * H_n^{(2)}(z) &= J_n(z) - iY_n(z), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\hat{u}_n(r) = A_n H_n^{(1)}(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont des constantes complexes indépendantes de  $r$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Par sommation, il vient :

$$(7.3) \quad \begin{cases} u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [A_n H_n^{(1)}(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr)] e^{in\theta}, \\ \forall r \in [0, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Dans  $\Omega_1$ , nous avons  $\Delta u^d + k_1^2 u^d = 0$  et la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini. Comme seule  $H_n^{(1)}$  vérifie cette condition, nous avons :

$$\begin{cases} u^d(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{n,1} H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta}, \\ \forall r \in [R_o + \delta, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

où  $A_{n,1}$  est une constante complexe à déterminer,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

En développant également la fonction  $u^{inc}$  en série de Fourier dans  $\Omega_1$ , nous avons :

$$\begin{cases} u^{inc}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{u}_n^{inc}(r) e^{in\theta}, \\ \forall r \in [R_o + \delta, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

où  $\hat{u}_n^{inc}(r)$  s'écrit par définition :

$$\begin{cases} \hat{u}_n^{inc}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik_1 r \cos \theta} e^{-in\theta} d\theta, \\ \forall r \in [R_o + \delta, +\infty[, \forall n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Une autre écriture de  $\hat{u}_n^{inc}(r)$  est :

$$\begin{cases} \hat{u}_n^{inc}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ik_1 r \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta, \\ \forall r \in [R_o + \delta, +\infty[, \forall n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

En outre, nous savons que (cf. [AS]) :

$$\begin{aligned} * J_n(z) &= \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{ik_1 r \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta, \quad \forall n \geq 0, \forall z \in \mathbf{C}, \\ * J_{-n}(z) &= (-1)^n J_n(z), \quad \forall n \geq 0, \forall z \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \hat{u}_n^{inc}(r) = (i)^{|n|} J_{|n|}(k_1 r), \\ \forall r \in [R_o + \delta, +\infty[, \forall n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} u^{inc}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (i)^{|n|} J_{|n|}(k_1 r) e^{in\theta}, \\ \forall r \in [R_o + \delta, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Finalement, nous pouvons écrire :

$$(7.4) \quad \begin{cases} u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} [A_{n,1} H_n^{(1)}(k_1 r) + (i)^{|n|} J_{|n|}(k_1 r)] e^{in\theta}, \\ \forall r \in [R_o + \delta, +\infty[, \forall \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$



Dans  $\Omega_2$ , nous avons :

$$\Delta u^d + k_2^2 u^d = (k_1^2 - k_2^2) u^{inc},$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\Delta u + k_2^2 u = 0.$$

D'après (7.3), nous avons donc :

$$(7.5) \quad \begin{cases} u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [A_{n,2} H_n^{(1)}(k_2 r) + B_{n,2} H_n^{(2)}(k_2 r)] e^{in\theta}, \\ \forall r \in [R_o, R_o + \delta], \forall \theta \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

où  $A_{n,2}$  et  $B_{n,2}$  sont des constantes complexes à déterminer,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Il reste à expliciter les constantes  $A_{n,1}$ ,  $A_{n,2}$  et  $B_{n,2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour cela, il suffit d'écrire la condition de Dirichlet sur  $\Gamma$  et les conditions de transmission sur  $\Gamma_\delta$  en utilisant (7.4) et (7.5). Ainsi, nous obtenons que  $A_{n,1}$ ,  $A_{n,2}$  et  $B_{n,2}$  sont les solutions du système d'équations suivant :

$$(7.6) \quad \begin{cases} -H_n^{(1)}[k_1(R_o + \delta)] A_{n,1} \\ + H_n^{(1)}[k_2(R_o + \delta)] A_{n,2} + H_n^{(2)}[k_2(R_o + \delta)] B_{n,2} & = (i)^{|n|} J_{|n|}[k_1(R_o + \delta)], \\ -\frac{k_1}{\mu_1} H_n^{(1)'}[k_1(R_o + \delta)] A_{n,1} \\ + \frac{k_2}{\mu_2} H_n^{(1)'}[k_2(R_o + \delta)] A_{n,2} + \frac{k_2}{\mu_2} H_n^{(2)'}[k_2(R_o + \delta)] B_{n,2} & = \frac{k_1}{\mu_1} (i)^{|n|} J_{|n|}'[k_1(R_o + \delta)], \\ H_n^{(1)}[k_2(R_o)] A_{n,2} + H_n^{(2)}[k_2(R_o)] B_{n,2} & = 0, \\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Finalement, la solution  $u$  du système (7.1) est entièrement déterminée par les formules (7.4) dans  $\Omega_1$  et (7.5) dans  $\Omega_2$ , dans lesquelles les constantes  $A_{n,1}$ ,  $A_{n,2}$  et  $B_{n,2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  sont les solutions du système d'équations (7.6).

## Références

- [A] Y. ACHDOU , 'Contributions à l'étude numérique des réseaux en électromagnétisme et de la couche limite en mécanique des fluides', *Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI*, (1990),
- [AN] T. ABBOUD, J.C. NEDELEC, 'Electromagnetic waves in an inhomogeneous medium', *Rapport interne CMAP, Ecole Polytechnique*, n° 179, (1989),
- [AS] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, 'Handbook of mathematical functions', *Dover publications*, (1968),
- [BT] A. BAYLISS, E. TURKEL, *Communication on Pure and Applied Mathematics*, **33**, (1980), pp. 707-725,
- [C] A. CARRAU, 'Modélisation numérique d'un écoulement sur paroi rugueuse'. *Thèse de l'université Bordeaux I*, (1992),
- [DL] R. DAUTRAY, J.L. LIONS, 'Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques', *Masson*, (1984),
- [EM] B. ENGQUIST, A. MAJDA, 'Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves', *Math. of Comp.*, (1977),
- [EN] B. ENGQUIST, J.C. NEDELEC, 'Effective boundary conditions for acoustic and electro-magnetic scattering in thin layers', *Rapport interne CMAP, Ecole Polytechnique*, n° 278, (1993),
- [F] K. FENG, *In proceedings, International Congress of Mathematicians* , Warsaw, Poland, (1983), pp. 1439,
- [G] D. GIVOLI, *Journal of Computational Physics*, **94**, n° 1, (1991),
- [KG] J.B. KELLER, D. GIVOLI, *Journal of Computational Physics*, **82**, n° 172, (1988),
- [S] W.K. SAUNDERS, 'On solutions of Maxwell's equations in an exterior region', *Proc. Nat. Acad. Sci.*, n° 38, (1952), pp. 342-348,
- [SS] Y. SAAD, M.H. SCHULTZ, 'GMRES: a Generalized Minimal Residual algorithm for solving non-symmetric linear systems', *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **7**, (1986), pp. 856-869,
- [Z] A. ZEBIC, 'Equation de Helmholtz : étude numérique de quelques préconditionnements pour la méthode GMRES', *Rapport INRIA*, n° 1802, (1992).



---

Unité de Recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes -46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

---

EDITEUR  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R - 2 8 9 1 ★